

# Précontrainte Totale et Partielle

## Optimisation des Ouvrages Isostatiques et Hyperstatiques

Nadim Abdelnour<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université Clermont Auvergne, Institut Pascal, CNRS-UCA-SIGMA, BP 10448, F 63000 Clermont

**RÉSUMÉ** Dans le cadre des travaux de la thèse traitant l'optimisation du dimensionnement des ponts en béton précontraint, cet article expose une nouvelle approche de dimensionnement analytique en précontrainte totale et partielle, selon les provisions de l'Eurocode. L'avantage principal de l'approche est l'introduction de la règle des pivots en béton précontraint ainsi que la combinaison cohérente et simultanée de tous les états limites de service et ultimes. La méthode est adaptée à un programme d'optimisation basé sur les algorithmes génétiques et visant à minimiser le coût total de l'ouvrage. Une application à un ouvrage VIPP à section en forme de T à talons est présentée, avec comme variables d'optimisation les dimensions géométriques de la structure, le pourcentage d'acier passif ainsi que la configuration des câbles de précontrainte. Des exemples numériques montrant l'efficacité de la méthode sont présentés.

**Mots-clefs** Précontrainte partielle, Règle des pivots, Optimisation, Algorithmes génétiques

### I. INTRODUCTION

La technique du béton précontraint a été introduite en 1928 par Eugène Freyssinet dans le but de compenser la faible résistance du béton à la traction. Actuellement, la précontrainte est largement utilisée dans la construction des ouvrages d'art, notamment des ponts, permettant ainsi des réductions dans le poids de la structure et le franchissement de portées plus importantes. Le rôle principal de l'ingénieur dans cette étude, est de concevoir une structure optimale qui satisfait aux exigences des normes avec un coût minimal.

C'est ainsi que s'est développée l'idée d'implémenter des techniques d'optimisation au dimensionnement des ouvrages. Plusieurs études ont montré l'efficacité de l'application des algorithmes évolutionnaires, tels que les algorithmes génétiques, dans l'optimisation du dimensionnement des structures, et plus particulièrement dans le cas de problèmes complexes non linéaires. Marti [1] a appliqué l'algorithme du recuit simulé afin d'aboutir au dimensionnement optimal d'un pont préfabriqué avec une section en forme de double U. Aydin [2] a minimisé le coût d'un pont à poutres en I préfabriquées en utilisant les algorithmes génétiques, il a abouti à une solution plus économique que celle qui a été adoptée dans le temps.

Du fait de la complexité du problème d'optimisation résultant du nombre élevé de variables et de la non-linéarité des contraintes, une approche de dimensionnement générale bien adaptée au calcul d'optimisation s'avère non seulement efficace mais essentielle, afin de faciliter autant que possible la procédure d'optimisation ainsi que l'exploitation des résultats.

Dans le cadre de l'optimisation des ponts en béton précontraint (BP), une approche de dimensionnement analytique a été développée, adaptée aux ouvrages isostatiques et hyperstatiques à inertie constante ou variable. Elle introduit une règle des pivots en BP pour le calcul en précontrainte totale et partielle. Basée sur la méthode de la matrice de transfert, l'approche traite toutes les étapes allant du calcul des sollicitations jusqu'aux vérifications aux états limites de service et ultimes, selon les provisions de l'Eurocode. Un article détaillant la nouvelle approche de dimensionnement et d'optimisation a été publié dans « Engineering Structures » [3].

Dans le présent article, la méthode exposée est appliquée au cas d'un VIPP à section en T à talons, pour différentes portées. Le problème d'optimisation est formulé sous forme d'une fonction mono-objectif visant à minimiser le coût total de la structure. La résolution est effectuée à l'aide des algorithmes génétiques et programmée sur "Scilab".

## II. STRATÉGIE ADOPTÉE

Le principe de la précontrainte totale vise à maintenir le béton dans un état de compression sous charges extrêmes de service. Apparue plus tardivement, la précontrainte partielle admet la décompression voire la fissuration du béton. La nouvelle approche présentée, règle des pivots en BP, similaire à la règle connue en béton armé, est inspirée de la pratique des professionnels qui optent toujours pour un dimensionnement optimal.

L'avantage principal de cette méthode est la combinaison d'une manière cohérente de tous les états limites ainsi que la formulation de la condition de coffrage en précontrainte totale et partielle. La force de précontrainte  $P$  est prise égale à une valeur probable variant entre deux limites. Le domaine admissible est construit en se basant sur la règle des pivots présentée permettant ainsi d'illustrer le gain apporté en précontrainte partielle.

## III. METHODE DE CALCUL CONVENTIONNELLE

Les anciennes normes françaises BPEL présentaient des limitations directes sur les contraintes en béton sous tous les états limites de service, ces limites sont remplacées dans l'Eurocode 2 par des limitations sur l'ouverture des fissures, sur les contraintes en béton ainsi qu'au niveau des aciers passifs et actifs selon l'état limite de service considéré.

Chaque état limite de service est caractérisé par des limitations de moment et de contraintes :

- $M_{min}$  et  $M_{max}$  : valeurs minimale et maximale du moment avec  $\Delta M$  leur différence
- $\sigma_{sup}$  et  $\sigma_{inf}$  : contraintes au niveau de fibres extrêmes de la section
- $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}_2$  : limitation de contrainte en fibre supérieure sous  $M_{min}$  et  $M_{max}$
- $\bar{\sigma}_3$  et  $\bar{\sigma}_4$  : limitation de contrainte en fibre inférieure sous  $M_{min}$  et  $M_{max}$

Limitation de contraintes		Condition de coffrage
$\bar{\sigma}_1 \leq \sigma_{sup}, M_{min} \leq \sigma_{sup}, M_{max} \leq \bar{\sigma}_2$ $\bar{\sigma}_4 \leq \sigma_{inf}, M_{max} \leq \sigma_{inf}, M_{min} \leq \bar{\sigma}_3$	(1)	$\frac{\Delta M v}{I} \leq \bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 \quad \frac{\Delta M v'}{I} \leq \bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4$

Pour chaque état limite de service, deux valeurs de  $P$  ( $P_{critique}$  et  $P_{sur-critique}$ ) sont calculées avec leurs excentricités correspondantes, la valeur maximale de la force est retenue.

#### IV. NOUVELLE REGLE DES PIVOTS

Dans cette approche, la force  $P$  est considérée une force extérieure. La limitation de l'ouverture des fissures est transformée en une limitation de contraintes au niveau des aciers passifs suivant une corrélation selon les normes prescrites par l'Eurocode.

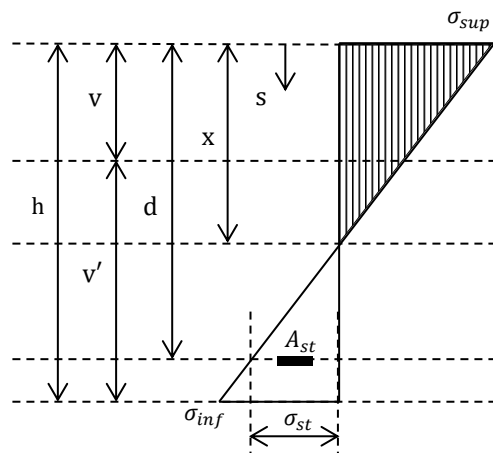


FIGURE 1. Diagramme des contraintes

Contrainte au niveau de la section « s » :

$$\sigma(s) = \left(1 - \frac{s}{x}\right) \sigma_{sup} \quad (3)$$

$$\sigma_{inf} = \frac{x - h}{x} \sigma_{sup} \quad (4)$$

$$\sigma_{st} = \alpha_e \frac{x - d}{x} \sigma_{sup} \quad (5)$$

$s$  position « s » de calcul

$x$  position de l'axe neutre

$\sigma_{inf}$  contrainte au niveau de la fibre inférieure

$\sigma_{sup}$  contrainte au niveau de la fibre supérieure

$\sigma_{st}$  contrainte au niveau des aciers passifs  $A_{st}$

$\alpha_e$  coefficient d'équivalence

Pour le cas d'une section en T à talons, ou aussi pour une section à caisson, la largeur  $b$  peut être définie comme variable linéairement par morceaux, les propriétés mécaniques de la section sont ainsi calculées par intégration successive en se basant sur les équations suivantes :

$$\frac{dI_{h/x}}{dx} = 2S_{h/x} \quad \frac{dS_{h/x}}{dx} = A_h \quad \frac{dA_h}{dx} = b(x) \quad (6)$$

$A_h$  : surface,  $S_{h/x}$  : moment statique,  $I_{h/x}$  : moment d'inertie.

Les équations d'équilibre du moment et de l'effort axial exprimées en fonction des propriétés mécaniques de la section donnent les équations principales représentant la base de cette approche.

$$P = \frac{\sigma_{sup} S_{h/x}}{x} \quad M^* = Pe_0 + M_{ext} \quad f(x) = I_{h/x} + \left(v - x - \frac{M^*}{P}\right) S_{h/x} = 0 \quad (7)$$

La courbe  $(P, M^*)$  est paramétrée en fonction de la position de l'axe neutre  $x$ , calculée en résolvant l'équation suivante :

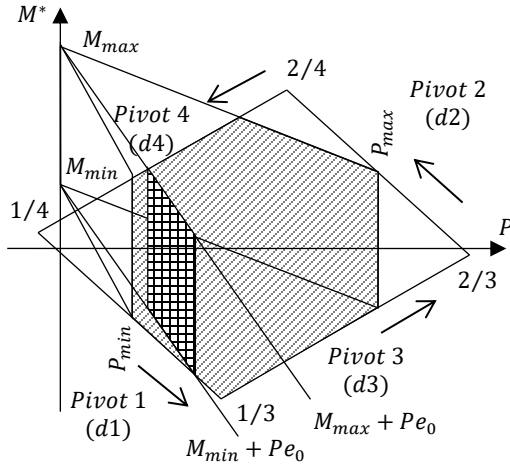
$$M^* = P \left[ \frac{I_{h/x}}{S_{h/x}} + v - x \right] \quad (8)$$

Il s'agit de trouver une position du câble  $e_0$  telle que les critères de contrainte soient respectés pour toutes les valeurs du moment des forces extérieures tenant compte les variations de la force de précontrainte. Le point représentatif de l'état de contrainte doit rester à l'intérieur de la ligne de rupture pour que la section soit vérifiée.

##### A. Section totalement comprimée

Lorsque la section est totalement comprimée, les intégrales sont calculées sur l'intervalle de hauteur  $[0, h]$ . La position de l'axe neutre est obtenue en résolvant l'équation  $f(x) = 0$ , ce qui permet de retrouver l'expression usuelle des contraintes en fibre supérieure et inférieure.

Le domaine admissible est défini dans le plan  $(P, M^*)$ , il est délimité par 4 droites de pentes  $\rho v$  et  $\rho v'$ , parallèles deux à deux et formant un parallélogramme.



En se déplaçant sur le contour du domaine admissible, et en parcourant les droites (d1) jusqu'à (d4), une seule limitation de contrainte est atteinte. Aux points d'intersection de 2 droites, 2 contraintes limites sont atteintes simultanément. A l'intérieur du domaine aucune contrainte n'est atteinte.

FIGURE 2. Domaine admissible en précontrainte totale

Les valeurs connues de  $P_{min}$  and  $P_{max}$  peuvent être déduites graphiquement, et sont affectées des coefficients  $\alpha_{min}$  and  $\alpha_{max}$  correspondants à chacun des états limite de service.

$$\text{Au niveau de la fibre supérieure} \quad (d1): \frac{I_h}{v} \bar{\sigma}_1 - \rho v' P \leq M^* \leq \frac{I_h}{v} \bar{\sigma}_2 - \rho v' P: (d2) \quad (9)$$

$$\text{Au niveau de la fibre inférieure} \quad (d3): \rho v P - \frac{I_h}{v'} \bar{\sigma}_3 \leq M^* \leq \rho v P - \frac{I_h}{v'} \bar{\sigma}_4: (d4) \quad (10)$$

Pour une valeur fixe de l'excentricité  $e_0$  : le moment total  $M^*$  varie en fonction de la force de précontrainte entre les valeurs suivantes

$$M_{min} + P e_0 \leq M^* \leq M_{max} + P e_0$$

La plage des valeurs admissibles de  $P$  combinant tous les états limites de service :

$$\max(\alpha_{min} P_{min}) \leq P \leq \min(\alpha_{max} P_{max}) \quad (11)$$

#### B. Précontrainte partielle / Section fissurée :

Pour une contrainte de traction inférieure à la résistance limite du béton, le calcul en précontrainte totale est applicable. Une fois cette limite dépassée, la section devient fissurée, toutefois dans cette approche, les mêmes expressions de la force  $P$  et du moment  $M^*$  peuvent être appliquées pour la détermination de la position de l'axe neutre.

La section est considérée non-fissurée sous  $M_{min}$  (pivots 1 et 3) et fissurée sous  $M_{max}$ . La même valeur de  $M_{min}^*$  est obtenue, et  $M_{max}^*$  peut être déterminée sur 3 segments différents.

$$\text{Pivot 2a = pivot 2, section non fissurée} \quad M_{max}^* = \frac{I_h}{v} \bar{\sigma}_2 - \rho v' P \quad (12)$$

$$\text{Pivot 2b, section fissurée} \quad M_{max}^* = \bar{\sigma}_2 \left[ \frac{I_{h/x} + (v-x) S_{h/x}}{x} \right] \quad (13)$$

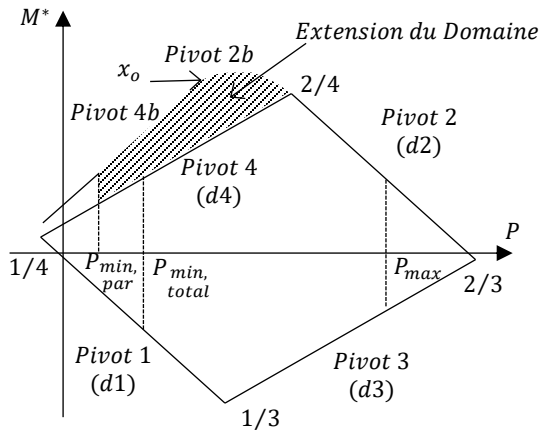
$$\text{Pivot 4b, section fissurée} \quad M_{max}^* = \frac{\bar{\sigma}_{st}}{\alpha_e} \left[ \frac{I_{h/x} + (v-x) S_{h/x}}{(d-x)} \right] \quad (14)$$

Les limites de contrainte sur l'armature passive et le béton sont atteintes simultanément pour une position particulière de l'axe neutre

$$x_0 = \frac{\alpha_e \bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_{st} + \alpha_e \bar{\sigma}_2} d \quad P_0 = \frac{\bar{\sigma}_2 S_{h/x_0}}{x_0} = \frac{f_{ks} S_{h/x_0}}{\alpha_e (d - x_0)} \quad (15)$$

Le même principe adopté en précontrainte totale est suivi pour le calcul des forces  $P_{critique}$ ,  $P_{sur-critique}$  et  $P_{max}$ . Ces valeurs sont obtenues en résolvant une équation polynomiale déduite de l'équation (8) ayant la forme générale suivante :

$$f(x) = I_{h/x} + (\lambda - x)S_{h/x} - ax + b(x - d) = 0 \quad (16)$$

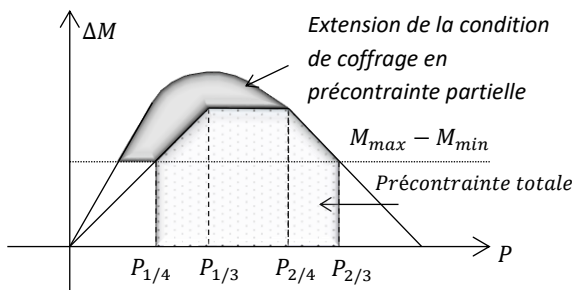


Le tracé du domaine admissible montre l'extension du domaine dans le cas de la précontrainte partielle, cette extension est délimitée par 2 courbes représentant les pivots 2b et 4b.

Un gain au niveau de la de force  $P_{min}$  peut être obtenu en précontrainte partielle étant donné que la droite (d4) représentant le pivot 4 est remplacée par la courbe 4b décalée vers le haut.

FIGURE 3. Extension du domaine admissible en précontrainte partielle

C. Condition de coffrage



Pour des sections ayant un rapport  $v/v' < 1$ , un gain dans la condition de coffrage est obtenu entre précontrainte totale et précontrainte partielle.

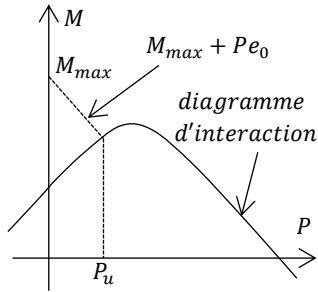
La condition de coffrage est exprimée indépendamment de P et  $e_o$ .

FIGURE 4. Condition de coffrage en précontrainte totale et partielle

La condition de coffrage est évaluée en précontrainte totale en se basant sur la hauteur du parallélogramme définie dans le plan  $(\Delta M, P)$ . Cette hauteur doit être supérieure aux variations des moments extérieurs  $(M_{max} - M_{min})$ . Le même principe est appliqué en précontrainte partielle avec un gain dans la valeur de  $\Delta M$  obtenu à partir des nouvelles équations des pivots 2b et 4b.

D. Vérification aux états limites ultimes

Pour un pourcentage donné d'aciers passifs, la force exacte  $P_u$  requise est la valeur de P correspondante à l'intersection entre le diagramme d'interaction et la droite  $M_{max} + P e_o$ . La section est considérée vérifiée à l'état limite ultime si la force  $P_u$  obtenue ne dépasse pas la force P requise à l'état limite de service.



Pour la construction du domaine admissible (P, M), les valeurs résultantes de P et M sont calculées en se basant sur les équations simplifiées suivantes. La section étant divisée en des segments à largeur variable, une intégrale  $I_i$  est introduite et calculée pour chaque segment.

FIGURE 5. Diagramme d'interaction (P, M)

$$N_c(x) = f_{cd} \left\{ A_c(x) - \frac{I_n}{(x - x_c)^n} \right\} \quad (17) \quad M_{c/c}(x) = f_{cd} \left\{ (x_c - x)A_c(x) + S_{c/c}(x) + \frac{I_{n+1}}{(x - x_c)^n} \right\} \quad (18)$$

E. Vérification de l'effort tranchant à l'état limite de service

Les provisions de l'annexe QQ de l'Eurocode [4] sont appliquées pour la vérification de l'effort tranchant à l'état limite de service, avec l'équation d'interaction (19) à vérifier.

$$\frac{\nabla_1}{f_{ctk,0.05}} + \frac{0.8 x \nabla_3}{f_{ck}} < 1 \quad (19)$$

V. OPTIMISATION PAR ALGORITHMES GÉNÉTIQUES

L'algorithme génétique (GA) est une méthode d'optimisation évolutionnaire inspirée de la théorie darwinienne pour la sélection des individus, basée sur le principe de la « survie des meilleurs ».

A. Fonction pénalisante

Les algorithmes génétiques étant généralement utilisés pour la résolution des problèmes sans contraintes, une fonction pénalisante est introduite afin de prendre en compte les contraintes non respectées. Elle vaut la somme absolue des contraintes normalisées violées.

$$p = \sum_{i=1}^n p_i \quad \begin{matrix} p_i = g_i & \text{for } g_i > 0 \\ p_i = 0 & \text{for } g_i \leq 0 \end{matrix} \quad (20)$$

n : le nombre total de contrainte,  $p_i$  : coefficient définissant la violation de la  $i^{\text{ème}}$  contrainte.

B. Dimensionnement optimal d'une poutre en béton précontraint :

Le problème d'optimisation est formulé comme suit :

Minimiser $F(x)$	$F(x)$ = fonction objectif
sous $g_i(x) \leq 0$	$g_i(x)$ = contraintes
$x^i \leq x \leq x^u$	$x$ = $\{x_k\}$ variables

Fonction objectif:

Cette étude a pour objectif de minimiser le coût par mètre linéaire d'une poutre en béton précontraint. La fonction objectif pénalisée est exprimée de la manière suivante :

$$F = (V_c C_c + W_s C_s + W_p C_p + P_{er} C_f)(1 + p)^2 \quad (21)$$

$C_c, C_s, C_p$  et  $C_f$  sont respectivement les coûts unitaires du béton, aciers passifs, aciers actifs et coffrage.  $V_c, W_s, W_p$  et  $P_{er}$  désignent respectivement le volume du béton, le poids des aciers passifs, le poids des aciers actifs et le périmètre de la section.

Le gousset de la section sert à loger les câbles avec une quantité minimale de béton ajoutée. Pour le dimensionnement, une table de données contenant toutes les configurations possibles pour un nombre de câbles allant de 1 à 10 a été définie dans le programme développé.

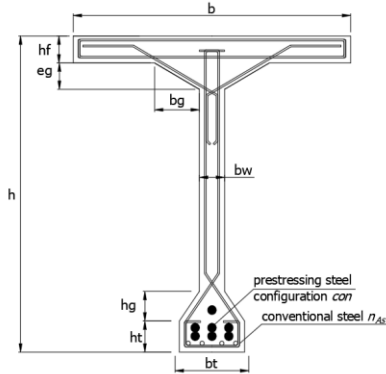


FIGURE 6. Section typique

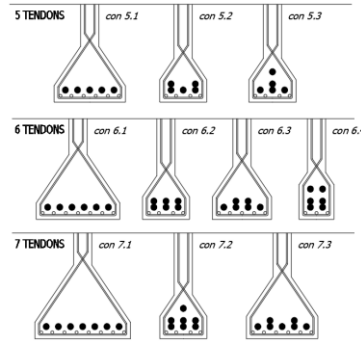


FIGURE 7. Configuration câbles

$h$
$b_w$
$b_t$
$h_t$
$h_g$
$n_{As}$
$con$

La variable « $n_{As}$ » représente le nombre d’acier passif et « $con$ » la configuration des câbles.

Les contraintes de flexion sont définies comme étant le ratio entre les sollicitations induites et les limites calculées suivant l’approche développée.

TABLEAU 2. Liste des contraintes

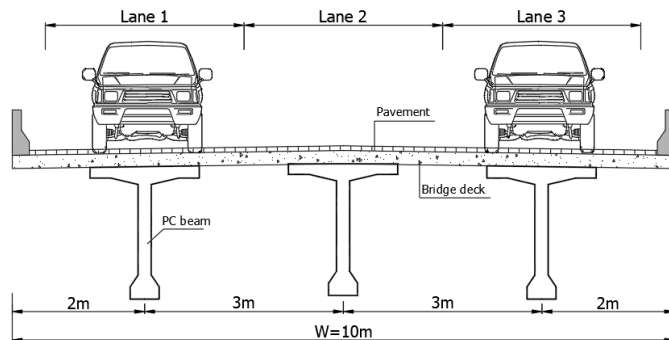
Contraintes géométriques	$h_{min} \leq h \leq h_{max}$	Contraintes de flexion	$g_1 = 1 - P_{min}/P$	$g_4 = 1 - P_u/P$
	$b_{w,min} \leq b_w \leq b_{w,max}$		$g_2 = 1 - P/P_{max}$	$g_5 = 1 - ratio_v$
	$b_w \leq b_t$		$g_3 = 1 - ratio_{coffrage}$	

## VI. EXEMPLE NUMÉRIQUE

La démarche d’optimisation présentée a été appliquée sur un VIPP à 3 voies.

L’étude est menée sur une poutre de rive supportant la plus grande charge suite au résultat de la distribution des charges transversales selon la méthode de Courbon.

FIGURE 8. Pont étudié



Une étude de sensibilité sur l’optimisation du coût a été menée pour différentes portées dans le but d’étudier l’influence de chacun des paramètres suivants sur la solution optimale : condition de coffrage, limite ELU, dimensions du gousset, effort tranchant et % aciers passifs.

TABLEAU 3. Résultats en Totale et Partielle

(%)Acier	0.60%		0.80%	
Préc.	Totale	Partielle	Totale	Partielle
P (MN)	14.95	10.92	15.1	9.04
N_câble	6	5	6	4
Aire(m <sup>2</sup> )	1.02	0.97	1.04	0.99

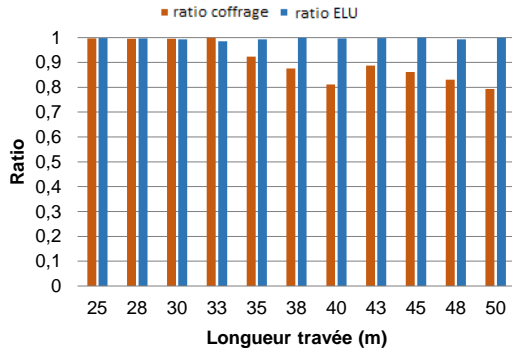


FIGURE 9. Ratio coffrage et ratio ELU en Totale

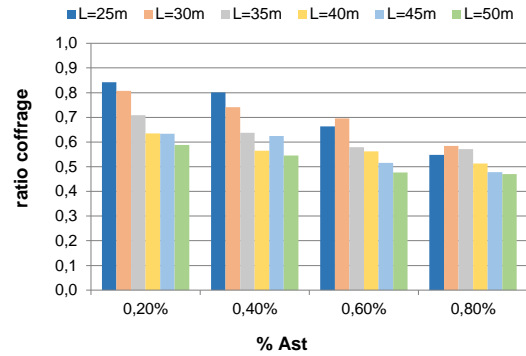


FIGURE 10. Condition de coffrage en Partielle

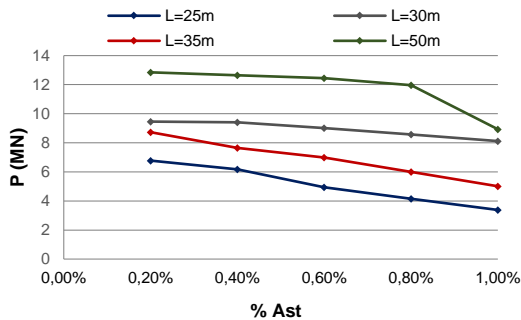


FIGURE 11. Effet du % acier passif sur P en Partielle

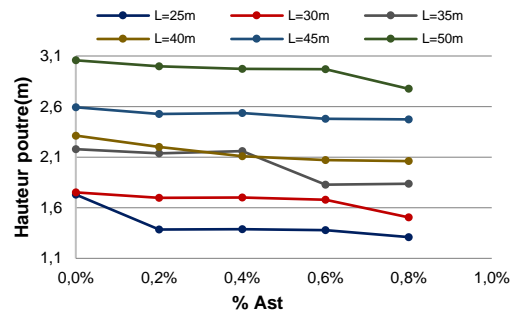


FIGURE 12. Effet du % acier sur h en Totale

## VII. CONCLUSION

- En précontrainte totale, pour des travées inférieures à 40m, les conditions de coffrage et ELU sont atteintes, alors que pour des longueurs supérieures, la limite ELU est dominante.
- La solution optimale en précontrainte totale est obtenue pour le % minimal d'Ast, dans le cas où la diminution de hauteur de la poutre n'est pas requise.
- Les résultats montrent une diminution significative de la force P, du nombre de câbles et de la condition de coffrage en précontrainte partielle.
- Cette étude montre l'efficacité des approches analytiques dans les méthodes de dimensionnement, elle permet au concepteur de situer sa solution du dimensionnement par rapport aux limites du domaine admissible.
- Contrairement aux méthodes conventionnelles dans lesquelles les variables ne peuvent pas facilement être optimisées, la formulation de la fonction objectif, exposée dans ce travail, peut être aisément adaptée aux objectifs du concepteur.

## RÉFÉRENCES

- [1] J. Marti, F. Vidoza, V. Yepes and J. Alcalá. (2012). "Design of Prestressed Concrete Precast Road Bridges with Hybrid Simulated Annealing". *Engineering Structures* 48 (2013) 342–352.
- [2] Z. Aydn and Y. Ayvaz. 2009. "Optimum Topology and Shape Design of Prestressed Concrete Bridge Girders Using a Genetic Algorithm". *Struc Multidisc Optim*, no. 41, pp. 151-162
- [3] N. Abdel Nour, D. Vié, A. Chateauneuf, S. Amziane, A. Kallassy. "Dimensioning of partially prestressed concrete beams, optimization of T-shaped section with heels". *Engineering Structures* 235 (2021) 112054.
- [4] Eurocode 2, EN 1992-2:200, Annexe QQ 5