

Identification d'une loi de comportement dissymétrique avec l'essai de fendage.

H Hong, S Bel and T N Baranger

LMC2 EA7427, Université Lyon 1, 82 bd Niels Bohr, Doua, 69622 Villeurbanne Cedex, France

RESUME : Nous présentons une étude sur l'identification des paramètres élastiques d'une loi de comportement linéaire dissymétrique d'un matériau fragile. L'identification se base sur l'essai de fendage d'un cylindre et la solution analytique associée sous l'hypothèse des déformations planes. Les paramètres à identifier sont les modules de Young en traction et compression et les coefficients de Poisson. Trois cas d'identification ont été analysés et sont présentés ici en se basant sur des données synthétiques, puis des données expérimentales.

Mots-clefs Essai de fendage, identification, loi dissymétrique, DIC

I. INTRODUCTION

Les matériaux fragiles tel que les bétons et les mortiers ont des lois de comportement dissymétriques en traction-compression. Ces lois sont paramétrées par les modules de Young en traction et compression E_c et E_t , les coefficients de Poisson ν_c et ν_t ainsi que les limites à la rupture en traction et en compression σ_c^r et σ_t^r . L'analyse de la réponse mécanique d'une structure faite avec ce type de matériau dépend essentiellement de ces paramètres, qui sont estimés à partir d'essais expérimentaux. Généralement, plusieurs types d'essais sont mis en œuvre pour identifier ces paramètres indépendamment les uns des autres. Souvent le matériau est considéré comme ayant le même module de Young en traction et en compression [1]. L'objectif de ce travail est d'identifier ces paramètres en minimisant le nombre de types d'essais. En effet, l'essai de fendage devrait permettre d'identifier cinq paramètres parmi les six : E_c , E_t , ν_c , ν_t et σ_t^r . La limite à la rupture en compression σ_c^r nécessitera un essai de compression pure sur cylindre. Les mesures des champs des déplacements nécessaires à l'identification des paramètres sont réalisables par la corrélation d'images numérique (DIC) [2].

II. Solution analytique de l'essai de fendage sur un cylindre

Une solution analytique en contrainte sous l'action de la charge F avec l'hypothèse de répartition uniforme de la pression sur le cylindre sur deux arcs symétriques (2α sur la Fig. 1), a été développée par Hondros [3] dans le repère cylindrique. Sur les axes AB et CD les deux contraintes dans le plan s'écrivent en fonction de l'abscisse curviligne s sous la forme suivante :

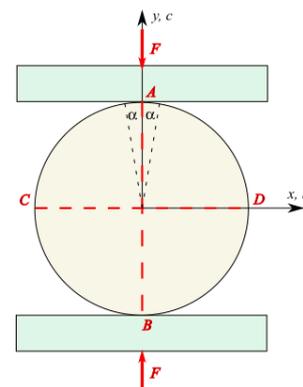


FIGURE 1. Essai de fendage

$$\text{Sur AB} \begin{cases} \sigma_y(s) = -\frac{F}{\pi\alpha hR} \left[\frac{(1-s^2)\sin(2\alpha)}{1-2s^2\cos(2\alpha)+s^4} + \tan^{-1}\left(\frac{1+s^2}{1-s^2}\tan(\alpha)\right) \right] \\ \sigma_x(s) = \frac{F}{\pi\alpha hR} \left[\frac{(1-s^2)\sin(2\alpha)}{1-2s^2\cos(2\alpha)+s^4} - \tan^{-1}\left(\frac{1+s^2}{1-s^2}\tan(\alpha)\right) \right] \end{cases} \text{ avec } s = \frac{y}{R} \quad (1)$$

$$\text{Sur CD} \begin{cases} \sigma_x(s) = \frac{F}{\pi\alpha hR} \left[\frac{(1-s^2)\sin(2\alpha)}{1+2s^2\cos(2\alpha)+s^4} + \tan^{-1}\left(\frac{1+s^2}{1-s^2}\cot(\alpha)\right) + \pi \right] \\ \sigma_y(s) = \frac{F}{\pi\alpha hR} \left[-\frac{(1-s^2)\sin(2\alpha)}{1+2s^2\cos(2\alpha)+s^4} + \tan^{-1}\left(\frac{1+s^2}{1-s^2}\cot(\alpha)\right) - \pi \right] \end{cases} \text{ avec } s = \frac{x}{R} \quad (2)$$

Cette solution est valable pour les conditions de contraintes et de déformations planes. Dans cette étude, c'est l'hypothèse des déformations planes qui est retenue pour développer la solution analytique. Le champ des déformations sur les axes AB et CD, où le cisaillement est nul, s'écrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E_t}\sigma_x - \frac{\nu_c}{E_c}\sigma_y - \frac{\nu_c}{E_c}\sigma_z; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\nu_c}{E_c}\sigma_x + \frac{1}{E_c}\sigma_y - \frac{\nu_c}{E_c}\sigma_z; \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu_c}{E_t}\sigma_x - \frac{\nu_c}{E_c}\sigma_y - \frac{1}{E_c}\sigma_z = 0 \quad (3)$$

$$\varepsilon_x^{CD}(s) = \frac{F}{\pi\alpha hR} \left[\left(\frac{1}{E_t} + \frac{\nu_c}{E_c} \right) \frac{(1-s^2)\sin(2\alpha)}{1+2s^2\cos(2\alpha)+s^4} + \left(\frac{1}{E_t} - \frac{\nu_c}{E_c} - \frac{2\nu_c^2}{E_c} \right) \tan^{-1}\left(\frac{1+s^2}{1-s^2}\cot(\alpha)\right) - \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{\nu_c}{E_c} - \frac{2\nu_c^2}{E_c} \right) \right] \quad (4)$$

$$\varepsilon_y^{AB}(s) = \frac{F}{\pi\alpha hR E_c} \left[-(v_c + 1) \frac{(1-s^2)\sin(2\alpha)}{1-2s^2\cos(2\alpha)+s^4} + (2\nu_c^2 + \nu_c - 1) \tan^{-1}\left(\frac{1+s^2}{1-s^2}\tan(\alpha)\right) \right] \quad (5)$$

A partir des équations (2), en substituant σ_z dans ε_x et ε_y , puis en les intégrant, respectivement suivant x et suivant y , on obtient les déplacements u_x sur CD et u_y sur AB, sous les formes suivantes :

$$u_x(s) = \frac{F}{\alpha h\pi} \left(-\left(\frac{1}{E_t} + \frac{\nu_c}{E_c} \right) A_x + \left(-\frac{1}{E_t} + \frac{\nu_c}{E_c} + \frac{2\nu_c^2}{E_c} \right) B_x + \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{E_t} + \frac{\nu_c}{E_c} + \frac{2\nu_c^2}{E_c} \right) C_x \right) \quad (6)$$

$$u_y(s) = \frac{F}{\alpha h\pi E_c} \left(-(v_c + 1) A_y + (2\nu_c^2 + \nu_c - 1) B_y \right) \quad (7)$$

Avec, la condition de symétrie $\frac{\nu_c}{E_c} = \frac{\nu_t}{E_t}$, puis $C_x = s$,

$$A_x = -\frac{1}{2} \cos(\alpha) \ln \left(\frac{s^2+2s\sin(\alpha)+1}{s^2-2s\sin(\alpha)+1} \right); \quad A_y = \frac{1}{2} \sin(\alpha) \ln \left(\frac{s^2+2s\cos(\alpha)+1}{s^2-2s\cos(\alpha)+1} \right)$$

$$B_x = A_x - s \tan^{-1} \left(\frac{(s^2+1)\cos(\alpha)}{(1-s^2)\sin(\alpha)} \right) + \sin(\alpha) \tan^{-1} \left(\frac{2s\cos(\alpha)}{1-s^2} \right)$$

$$B_y = A_y + s \tan^{-1} \left(\frac{(s^2+1)\sin(\alpha)}{(1-s^2)\cos(\alpha)} \right) - \cos(\alpha) \tan^{-1} \left(\frac{2s\sin(\alpha)}{1-s^2} \right)$$

III. Identification des modules de Young et coefficient de Poisson.

Les mesures du champ de déplacements, par corrélation d'images, sur une zone centrée de la face du cylindre, permettent d'extraire les déplacements $u_x^m(s)$ sur l'axe CD et $u_y^m(s)$ sur l'axe CD ainsi que les déformations correspondantes $\varepsilon_x^m(s)$ et $\varepsilon_y^m(s)$. Les images sont synchronisées avec l'évolution de l'effort $F(t)$ appliqué au cours de l'essai. La zone ainsi considérée montre une évolution linéaire des déplacements en fonction de $F(t)$. L'identification des paramètres (E_c, E_t, ν_c) se fait alors par recalage sur la solution analytique précédemment développée en minimisant une fonctionnelle mesurant l'écart entre le champ théorique et la mesure. Trois cas sont considérés :

- Recalage par rapport aux déplacements $u_x^m(s)$ et $u_y^m(s)$ pour chaque valeur $F(t)$. Les paramètres sont la solution du problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$(E_c^*, E_t^*, \nu_c^*) = \underset{E_c, E_t, \nu_c}{\operatorname{argmin}} J(E_c, E_t, \nu_c) = \frac{1}{2} \|u_x(s) - u_x^m(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|u_y(s) - u_y^m(s)\|^2 \quad (8)$$

- b. Recalage par rapport aux déformations $\varepsilon_x^m(s)$ et $\varepsilon_y^m(s)$ pour chaque valeur de $F(t)$. Les paramètres sont la solution du problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$(E_c^*, E_t^*, \nu_c^*) = \underset{E_c, E_t, \nu_c}{\operatorname{argmin}} J(E_c, E_t, \nu_c) = \frac{1}{2} \|\varepsilon_x(s) - \varepsilon_x^m(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|\varepsilon_y(s) - \varepsilon_y^m(s)\|^2 \quad (9)$$

- c. Recalage par rapport aux déformations $\varepsilon_x^m(0)$ et $\varepsilon_y^m(0)$ au centre en fonction de l'évolution de $F(t)$. Les paramètres sont la solution du problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$(E_c^*, E_t^*, \nu_c^*) = \underset{E_c, E_t, \nu_c}{\operatorname{argmin}} J(E_c, E_t, \nu_c) = \frac{1}{2} \|\varepsilon_x(0) - \varepsilon_x^m(0)\|^2 + \frac{1}{2} \|\varepsilon_y(0) - \varepsilon_y^m(0)\|^2 \quad (10)$$

Ces trois cas ont les mêmes conditions :

$$\text{avec } 0 \leq \nu_c \leq 0.5, \quad 0.01 \text{ GPa} \leq E_c \leq 22 \text{ GPa}, \quad 0.01 \text{ GPa} \leq E_t \leq 22 \text{ GPa}$$

Dans les deux premiers cas a et b, l'identification se fait image par image. Chaque image permet d'extraire suffisamment des données, on obtient donc autant de jeux de paramètres que d'images. Dans le dernier cas c, chaque image nous donne seulement deux déformations au centre. Pour assurer que l'identification fonctionne correctement, toutes les images sont retenues.

IV. Application

La première application est un cas théorique. Les mesures sont obtenues à partir des solutions exactes définies par les équations de (5) à (7), bruitées avec un bruit blanc additif (5%). Les données géométriques du cylindre sont : $R=0.015$ m, $h=0.055$ m, $\alpha = 0.01$. Les figures 2 et 3 présentent les champs identifiés comparés aux données. Le tableau 1 présente les jeux de paramètres obtenus dans chaque cas. Dans les deux premiers cas nous utilisons une image, correspondant à $F=4$ KN, pour le troisième cas nous utilisons 23 images, F variant de 0.5 KN et 5 KN par pas de 0,2 KN. La comparaison entre valeurs identifiées et valeurs d'origine montre l'applicabilité de la méthode, avec un avantage pour les cas a et b.

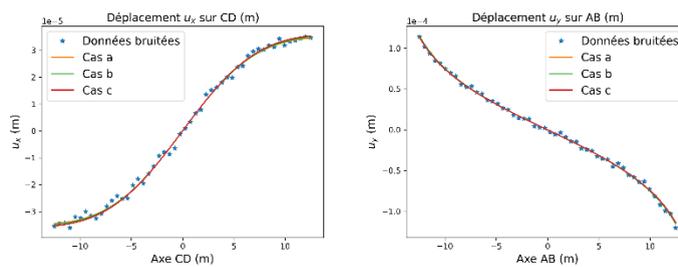


FIGURE 2. Déplacements : données bruitées et déplacements calculés à partir des paramètres identifiés

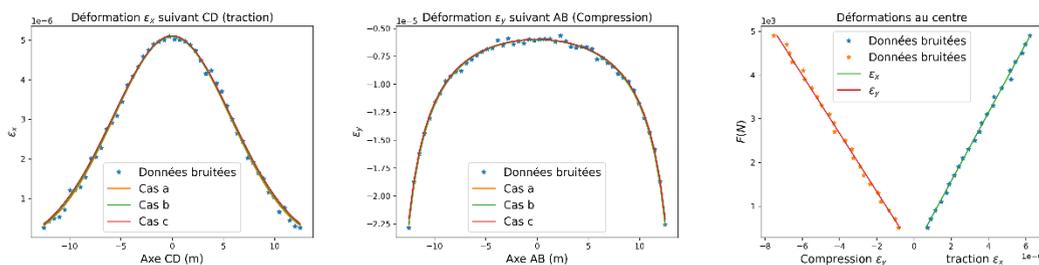


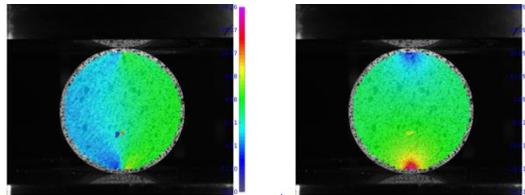
FIGURE 3. Déformations : données bruitées et déformations calculées à partir des paramètres identifiés**TABLEAU 1.** Paramètres identifiés à partir de données synthétiques bruitées avec un bruit blanc de 5%

Paramètres	Valeur Exacte	Valeur Identifiée		
		Cas a	Cas b	Cas c
E_c (GPa)	8	7.95 (0.63%)	7.94 (0.75%)	7.99 (0.13%)
E_t (GPa)	4	4.09 (2.25%)	4.33 (8.25%)	4.67 (16.75%)
ν_c	0.2	0.206 (3.00%)	0.234 (17.00%)	0.272 (36.00%)

La seconde application concerne un essai de fendage sur un échantillon en mortier. La figure 4 présente les mesures obtenues avec un système stéréoscopique et traitées avec le logiciel UFreckles [4]. L'identification faite suivant les cas a et c permet d'identifier les paramètres suivants :

cas a : $E_c = 8.3 \text{ GPa}$, $E_t = 8.1 \text{ GPa}$ et $\nu_c = 0.121$ et cas c : $E_c = 12.8 \text{ GPa}$, $E_t = 9.4 \text{ GPa}$ et $\nu_c = 0.148$.

Les résultats basés sur les déformations (cas b et c) sont très bruités car calculés d'après des déplacements eux-même bruités. Le cas b ne donne pas de résultat satisfaisant. Le cas c donne un résultat sans confiance, du fait de l'amplification des bruits. Afin d'augmenter la confiance dans les paramètres identifiés, l'application d'une technique de régularisation s'avère indispensable.

**FIGURE 4.** Mesures des champs u_x et u_y obtenues avec UFreckles sur un cylindre en mortier.

V. Conclusion

Une solution analytique sous l'hypothèse des déformations planes de l'essai de fendage a été développée. Elle a été mise en œuvre dans le cadre de l'identification des modules de Young et coefficient de Poisson d'un matériau fragile à comportement dissymétrique en traction et compression. Cette étude préliminaire a montré la nécessité de mettre en place une technique de régularisation pour minimiser l'effet du bruit pendant le processus d'identification.

REFERENCES

- [1]. C. Liu, M.L. Lovato (2010). Elastic Constants Determination and Deformation Observation Using Brazilian Disk Geometry. *Experimental Mechanics*, 50, 1025–1039.
- [2]. S. Roux, F.Hild. (2020). Optimal procedure for the identification of constitutive parameters from experimentally measured displacement. *International Journal of Solids and Structures*, 184, 14-23.

- [3]. G. Hondros (1959), The evaluation of Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete, *Austr. J. Appl. Sci.*, 10(3), 243-268.
- [4]. J. Réthoré (2018), UFreckles (version v 2.0) Zenodo, <http://doi.org/10.5281/zenodo.1433776> .