

# Comportement d'adhérence de poutres renforcées avec polymère renforcé de fibres (PRF) avec mesure par fibre optique à mesure distribuée.

**Andrea Armonico**<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Université de Lyon, Université Lyon1, Laboratoire des Matériaux Composites pour la Construction (LMC2), 82 bd Niels Bohr, 69622 Villeurbanne, France*

**RESUME** Cet article présente une étude expérimentale du comportement mécanique au niveau de l'interface béton-composite d'une poutre en béton armé renforcée avec un tissu composite en carbone (PRFC). Deux niveaux de renforcement ont été testés à la flexion sous un chargement en flexion 4 points. Les poutres ont été renforcées avec deux couches de tissu PRFC avec une fibre optique entre les deux couches. Le capteur est capable de mesurer la déformation du composite pendant l'essai avec une résolution spatiale de 2.6 millimètres. En utilisant les résultats des essais une évolution de la contrainte de cisaillement à l'interface béton – PRF a été évaluée. Avec l'aide de la corrélation d'images, l'ouverture des fissures a été détectée et superposée avec la courbe de contrainte de cisaillement. En outre, un modèle semi-empirique a été développé. Ce modèle permet de connaître l'évolution du comportement d'adhérence à l'interface en utilisant les données obtenues par un essai de double cisaillement conduit en petite échelle en utilisant les mêmes matériaux. Le modèle proposé a comme but de permettre d'anticiper une rupture structurelle due au décollement, en mesurant l'ouverture de fissure.

**Mots-clefs** PRFC, corrélation d'image, fibre optique, fissuration, contrainte d'adhérence.

## I. INTRODUCTION

Les constructions en béton armé représentent une partie importante du secteur de la construction. Le vieillissement des structures est un sujet particulièrement étudié dans le contexte du génie civil [1]–[4].

De la même manière, la surveillance des structures est devenue ces dernières décennies un domaine d'étude assez populaire, portant une attention particulière vers les constructions stratégiques (i. e. ponts ou digues). Au cours des dernières années, plusieurs technologies ont été développées afin d'améliorer les capacités de surveillance des structures. La première méthodologie utilisée consiste à effectuer des mesures avec des capteurs physiques ou des inclinomètres. Au fil des années, les équipements ont évolué et le processus s'est automatisé, mais il est toujours nécessaire de conduire des analyses de données afin de mieux comprendre le comportement global de la structure [5], [6].

Dans la pratique, ces instruments sont toujours utilisés, mais avec l'avènement des nouvelles technologies le jeu de données a été amélioré. La fibre optique est devenue l'instrument le plus utilisé dans la plupart des champs d'étude, y compris dans la surveillance structurale [7]–[11]. Cet instrument a la capacité d'acquérir des résultats avec une très haute résolution spatiale, bien que son coût élevé ne le rende pas accessible à tous. Plusieurs études ont été publiées en utilisant cette technologie pour un monitoring localisé [12]–[15] ou distribué [16]–[19].

Dans le même temps, à cause du vieillissement des structures en béton armé, une partie des ouvrages a déjà été renforcée avec des composites à base polymère (PRF) [20]–[23] avec fibre en carbone (PRFC) ou verre (GPRF).

En l'occurrence, les dernières recherches dans le domaine offrent maintes références pour pouvoir dimensionner convenablement le renforcement structurel à l'aide de PRF. Et, par voie de conséquence, d'avoir les indications nécessaires quant aux essais à effectuer pour obtenir la caractérisation mécanique des matériaux, et en même temps la définition de la capacité portante de la structure [24]–[30]. Ces mêmes recherches n'apportent en revanche pas assez d'informations à l'égard de l'évolution de la contrainte dans les structures renforcées.

Compte tenu des considérations présentées ci-dessus, l'étude présentée ici se donne comme objectif de proposer une méthodologie appropriée qui permettrait de connaître le comportement au niveau de l'interface d'une structure renforcée d'un tissu en PRFC et au final de pouvoir anticiper l'effondrement.

Pour mener cette étude, nous avons utilisé un capteur à fibre optique positionné entre deux couches de tissu en PRFC, corroboré concomitamment avec de la corrélation d'images numériques (DIC) [31]–[33], afin d'obtenir, et comparer les résultats vis-à-vis de la fissuration.

## II. PROGRAMME EXPERIMENTALE

Cette étude se propose d'analyser le comportement en flexion 4 points d'une poutre en béton armé renforcée par des PRFC. En particulier, l'étude vise à évaluer un modèle estimant la contrainte d'adhérence au niveau de l'interface béton - PRFC. L'étude expérimentale a été divisée en deux sections, dont l'une sur les essais à moyenne échelle, et la seconde sur les essais à petite échelle.

Dans un premier temps, des poutres de section rectangulaire sont testées en flexion et instrumentées à l'aide de différentes technologies de mesure. Le champ des déformations de surface est relevé en utilisant la technique de corrélation d'images numériques (DIC) ; la flèche est mesurée à l'aide de deux capteurs de déplacement de type LVDT. La déformation est mesurée à l'aide de jauges électriques et d'un capteur à fibre optique à mesure distribuée (DFOS) basé sur le principe de rétrodiffusion de Rayleigh (OFDR). L'utilisation d'un capteur à mesure distribuée est justifiée par le comportement à la fissuration d'un élément en béton armé. En fait, puisque le point d'apparition de la fissure est aléatoire dans la zone à moment constant, un capteur local (i.e. jauges à déformation) peut ne pas l'intercepter parfaitement. Un DFOS dans ce cas représente un système très utile et efficace pour comprendre le comportement au point de fissuration et dans ses environs.

En parallèle, un essai de double cisaillement est effectué sur trois spécimens pour obtenir le comportement d'adhérence du CFRP. L'instrumentation est composée de plusieurs jauges de déformations placées sur la surface du CFRP et de deux LVDT placés sur des blocs opposés afin de

détecter le déplacement relatif. La DIC est utilisée pendant l'essai pour obtenir le domaine du champ de déformation.

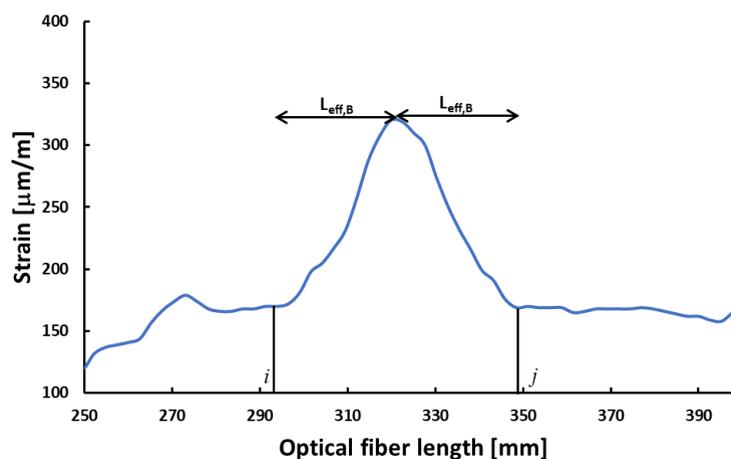
Les deux essais définissent et détectent une *longueur effective* en utilisant deux approches différentes. Le modèle a été développé à partir de la comparaison entre les longueurs effectives et en calculant la contrainte d'adhérence à partir des données de déformation.

### III RESULTATS

Les essais conduits ont fourni une quantité importante de résultats. La fibre optique posée entre les deux couches du composite a permis la mesure de la déformation avec un intervalle de 2.6 mm ; la corrélation d'image a fourni d'autre part le champ de déformation des poutres permettant ainsi d'enregistrer l'évolution de la fissuration. Les résultats obtenus par les deux technologies ont été utilisés pour obtenir des informations mécaniques sur les spécimens montrés en détail dans les sections suivantes.

#### A. Longueur effective

La longueur effective peut être considérée comme la longueur d'influence d'une fissure. En l'absence des fissures, cette définition nécessite une interprétation différente. En utilisant les données obtenues par les essais de flexion et double cisaillement, la longueur effective a été calculée avec deux approches. La première définition est la plus commune, elle prend en compte la zone d'adhérence entre l'acier et le béton. En fait on peut définir comme longueur effective  $L_{eff,B}$  la longueur où il n'y a pas de changements en déformation dans le béton (Figure 1) à cause de la compatibilité des matériaux (i.e. acier et béton). Les auteurs ont évalué cette zone en utilisant les données obtenues par la fibre optique. La deuxième  $L_{eff,S}$ , cependant, prend en compte la zone d'adhérence du renforcement en utilisant le champ de déformations obtenu par la DIC (Figure 2) : la longueur effective dans ce cas peut être considérée comme la longueur où il y a une déformation locale du composite.



**FIGURE 1** Longueur effective d'une fissure dans une poutre en béton armé renforcée avec deux couches de PRFC

Au vu du champ de recherche de cet article, la longueur effective a été mise en relation avec l’ouverture des fissures. Pour les essais de flexion la procédure a été assez rapide, cependant pour obtenir une relation dans le deuxième groupe d’essais une largeur de fissure équivalente a été déterminée comme la différence entre le déplacement des blocs et la déformation du composite. Le graphique de la Figure 3 montre la corrélation entre « largeur de fissure – longueur effective » qui regroupe les valeurs pondérées par la charge obtenues dans les deux groupes d’essai.

En conclusion, il en résulte une adéquation des résultats des deux essais, permettant ainsi de considérer  $L_{eff,B} \approx L_{eff,S}$ .

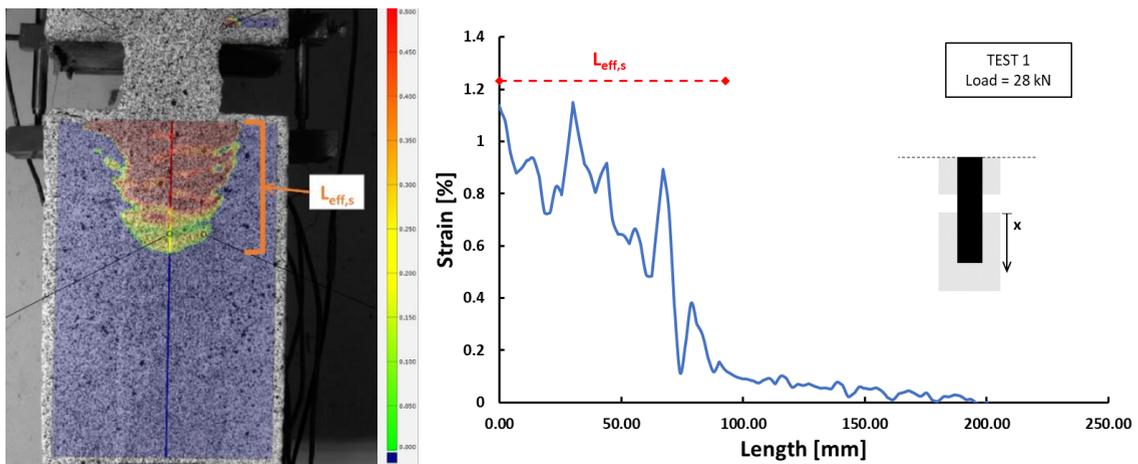


FIGURE 2 Longueur effective dans un essai de double cisellement d’un tissu PRFC

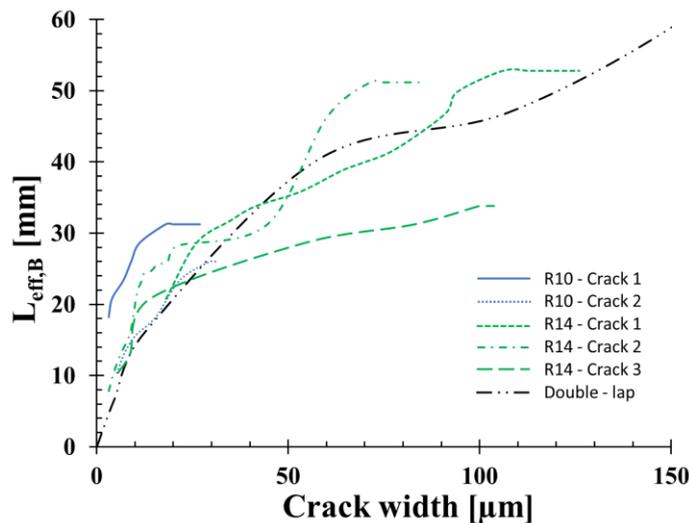


FIGURE 3 Comparaison des longueurs effectives obtenues suivant les deux méthodes d’essais

B. Contrainte d’adhérence

Le comportement à l’interface entre PRFC et béton a déjà été étudié au fil des années [34]–[38]. En utilisant les valeurs de déformation obtenues par la fibre optique, la contrainte tangentielle  $\tau(x)$  est calculée en suivant l’équation (1), conformément à la Figure 4, où  $\epsilon_i$  est la déformation mesurée

par la fibre optique,  $E_{FRP}$  est le module d'élasticité du composite calculé par la théorie des mélanges,  $t$  est l'épaisseur du composite et  $dx$  est la résolution spatiale de la fibre (égale à 2.6 mm). Les résultats sont montrés en Figure 5 avec un zoom sur une fissure en Figure 6.

$$\tau(x) = \frac{(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) \cdot E_{FRP} \cdot t}{dx} \quad (1)$$

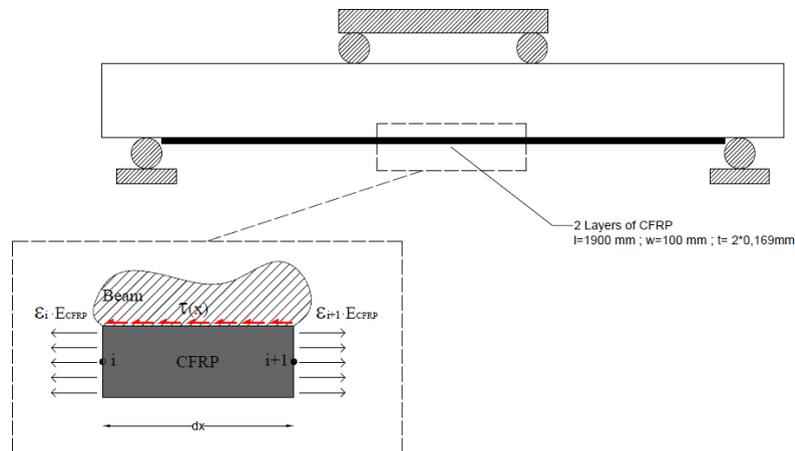


FIGURE 4 Equilibre mécanique utilisé pour le calcul de la contrainte tangentielle

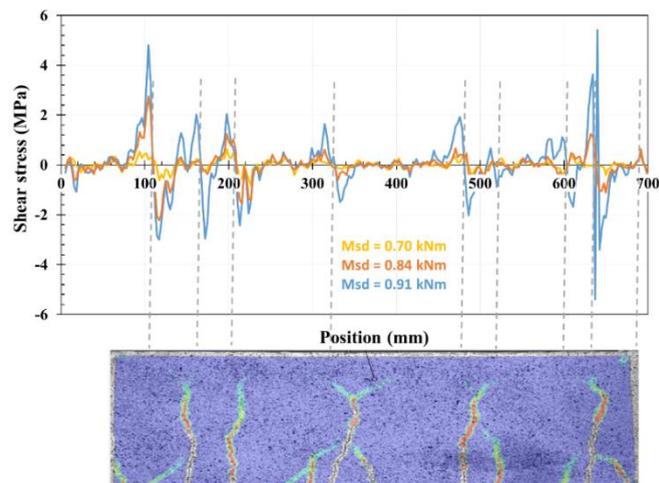


FIGURE 5 Comportement global de la contrainte d'adhérence pour un tissu en composite collé dans la partie tendue d'une poutre en béton armé

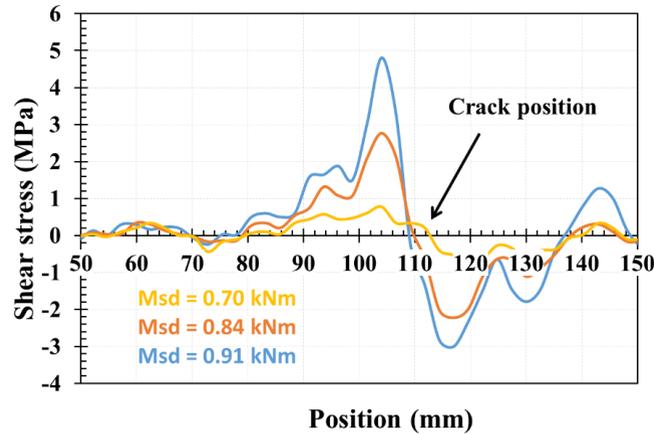


FIGURE 6 Comportement local de la contrainte d'adhérence dans l'environ d'une fissure

#### IV MODELE SEMI-EMPIRIQUE

Les résultats expérimentaux ont fourni l'évolution de la contrainte tangentielle avec une définition de longueur effective : une obtenue par l'essai à flexion ( $L_{eff,B}$ ), l'autre par le double cisaillement ( $L_{eff,S}$ ). Les deux définitions ont été comparées et les auteurs ont trouvé une adéquation entre les résultats. En regardant le jeu de données, la contrainte d'adhérence obtenue  $\tau(x)$  peut être décrite avec les considérations suivantes : (a) du rapport entre  $\tau_{max}$  et la longueur effective, il en résulte une constante  $\alpha$  ayant une valeur moyenne expérimentale égale à 0.07 (2) ; (b) de manière empirique, la valeur maximale de la contrainte  $\tau_{max}$  est atteinte à une distance  $d = 5 \text{ mm}$  de la fissure ; (c) le comportement de la fonction  $\tau(x)$  est mieux approximé par deux fonctions, dont une linéaire, entre le point de fissuration et la valeur  $\tau_{max}$  (3) et l'autre logarithmique, entre la valeur  $\tau_{max}$  et la valeur  $\tau(x) \cong 0$  (4) où les deux constantes, A et B, dont la valeur reste à définir.

$$\frac{\tau_{max}}{L_{eff,s}} = 0.07 \left( \frac{N}{mm^3} \right) = \alpha \quad (2)$$

$$\tau(0 \leq x \leq d) = \frac{\alpha L_{eff,s} x}{d} \quad (3)$$

$$\tau(d < x \leq L_{eff}) = A \ln(x) + B \quad (4)$$

Pour trouver la valeur des deux constantes, A et B, il faut imposer deux conditions limites. La première est fournie expérimentalement, en fait pour une distance  $d = 5 \text{ mm}$ , la valeur de la contrainte tangentielle est maximale (5). La deuxième condition est obtenue en appliquant la définition de la longueur effective dans les poutres : pour une valeur  $x = L_{eff,s}$  la contrainte d'adhérence est égale à zéro (6).

$$\tau(d = 5) = A \ln(d = 5) + B = \tau_{max} = \alpha \cdot L_{eff,s} \quad (5)$$

$$\tau(L_{eff,s}) = A \ln(L_{eff,s}) + B = 0 \quad (6)$$

Le modèle résultant est montré dans l'équation (7).

$$\tau(x) = \frac{\alpha \cdot L_{eff,s}}{\ln\left(\frac{d}{L_{eff,s}}\right)} \cdot \ln\left(\frac{x}{L_{eff,s}}\right) \quad (7)$$

Dans le modèle exposé, et dont la valeur de la largeur de la fissure est connue, la longueur effective peut être obtenue à l'aide de la courbe de double cisaillement présentée à la Figure 3. Prenant en considération la forme inverse de l'équation (1), la valeur de déformation peut être déduite à partir d'une valeur connue, soit  $\varepsilon_i$  (i.e. mesuré par une jauge déformation ou par la théorie) (8).

$$\varepsilon_{i+1} = \tau(x) \cdot \frac{dx}{E_{FRP} \cdot t} + \varepsilon_i \quad (8)$$

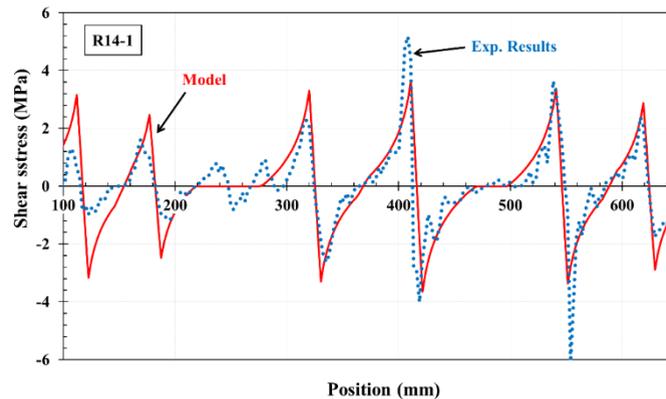
#### A. Validation du coefficient $\alpha$

Le coefficient  $\alpha$  peut être considéré comme une valeur prenant en compte les caractéristiques mécaniques des matériaux, et défini de façon empirique comme le rapport entre  $\tau_{max}$  et  $L_{eff,s}$ . Si le substrat ou le composite sont modifiés, il doit bien entendu être validé. Pour le faire, il faut partir de l'équation (7), et utiliser une méthode inverse. Concrètement, la valeur de l'ouverture des fissures ainsi calculée pour un cas d'étude est à comparer par la suite avec la mesure réelle.

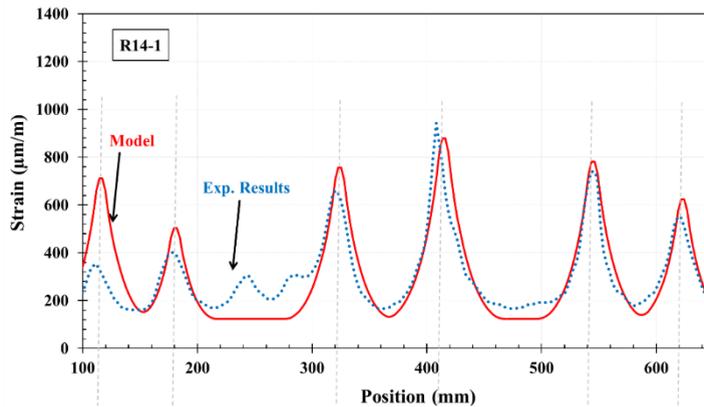
En détail, le modèle fournit de valeurs de  $\tau(x)$  quant aux fissures analysées. Ensuite, employant l'équation (1) le profil de déformation est ainsi obtenu. En conséquence, il est également possible d'obtenir la largeur de fissure. En comparant les valeurs de largeur de fissure avec les résultats fournis par une acquisition DIC, le coefficient  $\alpha$  peut être validé et potentiellement modifié.

Afin d'expliquer directement la méthodologie proposée, une des poutres testées a été étudiée. Comme indiqué ci-dessus, la valeur choisie de  $\alpha$  est égale à 0,07. Les profils de déformation et de contrainte tangentielle ont été construits pour la poutre R14-1 et sont reportés sur la Figure 7 et la Figure 8. La comparaison est conduite avec les résultats obtenus par fibre optique traitée (Figure 1). La largeur maximale des fissures  $w_c$  est calculée comme explicité par l'équation (9) où  $\varepsilon_n$  est la valeur de déformation mesurée par la fibre et  $dx$  est sa résolution spatiale. Les résultats obtenus montrent une bonne concordance du modèle dans la zone de fissuration. La procédure de calibration est résumée et montrée à la Figure 9.

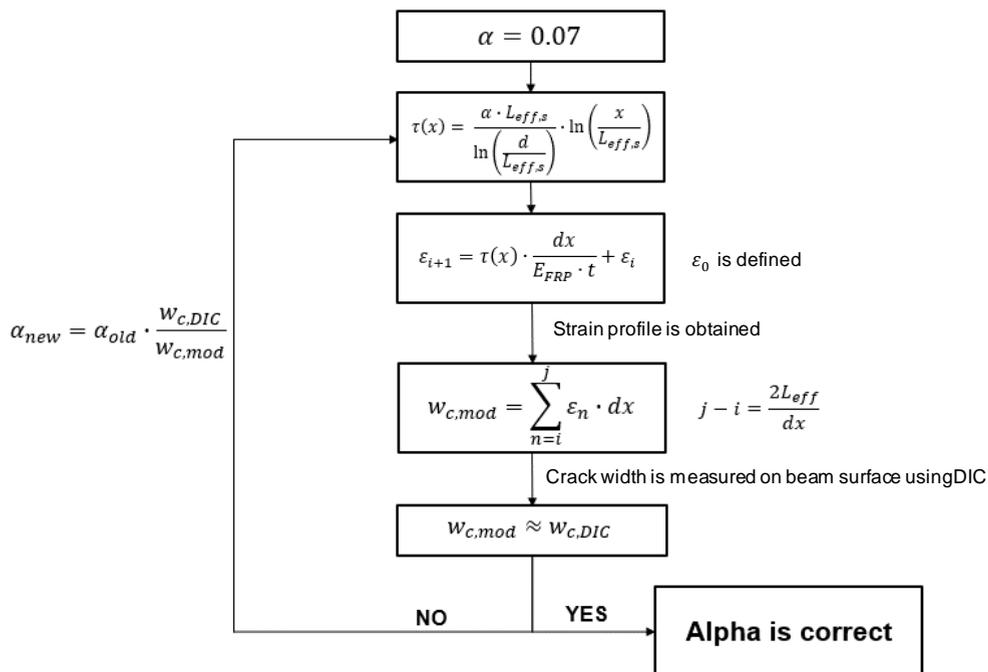
$$w_c = \sum_{n=i}^j \varepsilon_n \cdot dx \quad (9)$$



**FIGURE 7** Comparaison entre les valeurs expérimentales et analytiques de la contrainte tangentielle référées à un moment fléchissant de  $7 \text{ kN} \cdot \text{m}$



**FIGURE 8** Comparaison entre les valeurs expérimentales et analytiques de la déformation, référées à un moment fléchissant de 7 kN · m



**FIGURE 9** Procédure de calibration du coefficient  $\alpha$

## V CONCLUSIONS

L'étude présentée vise à fournir un outil pour la surveillance des structures renforcées. Le système de renforcement rend difficile l'application des codes modèles existants à cette typologie de structures. L'utilisation des technologies des dernières années (fibre optique, corrélation d'images numériques) a permis d'obtenir un ensemble de résultat et de données vis-à-vis des champs de déformation et de contrainte. Trois essais à petite échelle (c'est-à-dire des essais de cisaillement en double recouvrement) ont été réalisés. Les résultats ont permis d'établir une relation entre l'ouverture de la fissure, considérée comme l'allongement relatif, et la longueur effective  $L_{eff,S}$

définie comme la longueur à laquelle une déformation significative peut être détectée dans le composite. En même temps, la deuxième définition de la longueur effective a été fournie par des essais à moyenne échelle sur poutres. En analysant les données des fibres optiques, la longueur effective dans une poutre a été définie comme la distance entre le pic de contrainte près de la fissure et le début de la zone de déformation constante. Les deux définitions de la longueur effective pondérée par la charge, ont été comparées, et une bonne correspondance a été mise en évidence, permettant de transposer le résultat à petite échelle dans des essais à moyenne échelle.

Un modèle analytique a été proposé à partir des données déterminées expérimentalement, ce qui a permis de définir le comportement et les points caractéristiques de la loi de contrainte tangentielle. Ensuite, une formule analytique a été fournie et vérifiée en utilisant une poutre testée avec des résultats satisfaisants. Le modèle représente un bon outil pour la surveillance de l'état des structures, même en cas de charge en service. En effet, à partir de la déformation locale acquise à l'aide des technologies présentées dans l'introduction, il est possible d'enrichir la base de données avec des informations concernant l'interface béton-composite pour anticiper un décollement.

En outre, la prédiction des contraintes tangentielles permet de connaître le profil de déformation et, par conséquent, la flèche à mi-portée, ce qui rend cet outil utile pour la vérification des contraintes et des déformations sous charge de service.

## REFERENCES

- [1] N. Adamo, N. Al-Ansari, V. Sissakian, J. Laue, and S. Knutsson, 'Dam Safety: Technical Problems of Ageing Concrete Dams', vol. 10, pp. 241–279, Jun. 2020.
- [2] I.-S. Ahn, 'Creep and Shrinkage of Early-Age Concrete at Cold Temperature', *Adv. Civ. Eng. Mater.*, vol. 10, no. 1, pp. 300–312, Jun. 2021, doi: 10.1520/ACEM20200101.
- [3] I. Maruyama and P. Lura, 'Properties of early-age concrete relevant to cracking in massive concrete', *Cem. Concr. Res.*, vol. 123, p. 105770, Sep. 2019, doi: 10.1016/j.cemconres.2019.05.015.
- [4] R. Wan-Wendner, 'Aging concrete structures: A review of mechanics and concepts', *Bodenkult. J. Land Manag. Food Environ.*, vol. 69, pp. 175–199, Nov. 2018, doi: 10.2478/boku-2018-0015.
- [5] P. P. Rossi and C. Rossi, 'Monitoring of two great venetian cathedrals: San Marco and Santa Maria Gloriosa dei Frari', *Int. J. Archit. Herit.*, vol. 9, no. 1, pp. 58–81, 2015.
- [6] C. Wang, J. Xiao, C. Zhang, and X. Xiao, 'Structural health monitoring and performance analysis of a 12-story recycled aggregate concrete structure', *Eng. Struct.*, vol. 205, p. 110102, Feb. 2020, doi: 10.1016/j.engstruct.2019.110102.
- [7] L. Deng and C. S. Cai, 'Applications of fiber optic sensors in civil engineering', *Struct. Eng. Mech.*, vol. 25, no. 5, pp. 577–596, 2007.
- [8] G. Fernando, D. Webb, and P. Ferdinand, 'Optical-Fiber Sensors', *MRS Bull.*, vol. 27, May 2002, doi: 10.1557/mrs2002.120.
- [9] K. T. V. Grattan and T. Sun, 'Fiber optic sensor technology: an overview', *Sens. Actuators Phys.*, vol. 82, no. 1–3, pp. 40–61, 2000.
- [10] C. K. Y. Leung, 'Fiber optic sensors in concrete: the future?', *Ndt E Int.*, vol. 34, no. 2, pp. 85–94, 2001.

- [11] B. Soller, D. Gifford, M. Wolfe, and M. Froggatt, 'High resolution optical frequency domain reflectometry for characterization of components and assemblies', *Opt. Express*, vol. 13, pp. 666–74, Feb. 2005, doi: 10.1364/OPEX.13.000666.
- [12] P. Antunes, H. Lima, H. Varum, and P. André, 'Optical fiber sensors for static and dynamic health monitoring of civil engineering infrastructures: Abode wall case study', *Measurement*, vol. 45, no. 7, pp. 1695–1705, Aug. 2012, doi: 10.1016/j.measurement.2012.04.018.
- [13] P. Ferdinand, 'Optical fiber Bragg grating inclinometry for smart civil engineering and public works', in *Fourteenth International Conference on Optical Fiber Sensors*, 2000, vol. 4185, p. 41855O.
- [14] S. Lu and H. Xie, 'Strengthen and real-time monitoring of RC beam using "intelligent" CFRP with embedded FBG sensors', *Constr. Build. Mater.*, vol. 21, no. 9, pp. 1839–1845, Sep. 2007, doi: 10.1016/j.conbuildmat.2006.05.062.
- [15] M. P. Whelan, D. Albrecht, and A. Capsoni, 'Remote structural monitoring of the Cathedral of Como using an optical fiber Bragg sensor system', in *Smart structures and materials 2002: smart sensor technology and measurement systems*, 2002, vol. 4694, pp. 242–252.
- [16] C. G. Berrocal, I. Fernandez, and R. Rempling, 'Crack monitoring in reinforced concrete beams by distributed optical fiber sensors', *Struct. Infrastruct. Eng.*, vol. 17, no. 1, pp. 124–139, 2021.
- [17] J. Dakin, 'Distributed optical fiber sensors', *Proc. SPIE - Int. Soc. Opt. Eng.*, vol. 1797, Mar. 1993.
- [18] D. Inaudi and B. Glisic, 'Long-range pipeline monitoring by distributed fiber optic sensing', *J. Press. Vessel Technol.*, vol. 132, no. 1, 2010.
- [19] M. Saidi and A. Gabor, 'Use of distributed optical fibre as a strain sensor in textile reinforced cementitious matrix composites', *Measurement*, vol. 140, pp. 323–333, 2019.
- [20] A. Bilotta, A. Compagnone, L. Esposito, and E. Nigro, 'Structural behaviour of FRP reinforced concrete slabs in fire', *Eng. Struct.*, vol. 221, p. 111058, Oct. 2020, doi: 10.1016/j.engstruct.2020.111058.
- [21] M. Issa and E.-S. Ismail, 'Long-term deflections of FRP reinforced concrete beams', *HBRC J.*, vol. 16, pp. 269–282, Sep. 2020, doi: 10.1080/16874048.2020.1812897.
- [22] F. Micelli, A. Cascardi, and M. A. Aiello, 'Pre-Load Effect on CFRP-Confinement of Concrete Columns: Experimental and Theoretical Study. Crystals 2021, 11, 177'. 2021.
- [23] A. Tarawneh and S. Majdalaweyh, 'Design and reliability analysis of FRP-reinforced concrete columns', *Structures*, vol. 28, pp. 1580–1588, Oct. 2020, doi: 10.1016/j.istruc.2020.10.009.
- [24] ACI Committee 440, *440.2R-17: Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures*. American Concrete Institute, 2017. doi: 10.14359/51700867.
- [25] AFGC, 'Réparation et renforcement des structures en béton au moyen des matériaux composites'. 2011. [Online]. Available: <https://www.afgc.asso.fr/publication/reparation-et-renforcement-des-structures-en-beton-au-moyen-des-materiaux-composites/>
- [26] S. (Schweizer I. Architektenverein), 'Klebebewehrungen (externally bonded reinforcements)', *SIA166*, 2004.
- [27] I. Canada, *Strengthening Reinforced Concrete Structures with Externally-bonded Fibre Reinforced Polymers [computer File]*. ISIS Canada, 2001.
- [28] Consiglio Nazionale delle Ricerche, 'Guide for the Design and Construction of Fiber-Reinforced Concrete Structures', *Rome Italy Natl. Res. Counc.-Advis. Comm. Tech. Recomm. Constr. SN CNR-DT*, vol. 204, p. 2006, 2006.

- [29] A. Darby, T. Ibell, and J. Clarke, *TR55 Design guidance for strengthening concrete structures using fibre composite materials*. The Concrete Society, 2004.
- [30] T. Triantafillou *et al.*, 'Externally bonded FRP reinforcement for RC structures', *Bulletin FIB*, vol. 14. International Federation for Structural Concrete (fib), 2001.
- [31] T. C. Chu, W. F. Ranson, and M. A. Sutton, 'Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics', *Exp. Mech.*, vol. 25, no. 3, pp. 232–244, 1985.
- [32] T. Grabois, J. Neggers, L. Ponson, F. Hild, and R. Toledo Filho, 'On the validation of integrated DIC with tapered double cantilever beam tests', *Eng. Fract. Mech.*, vol. 191, pp. 311–323, Mar. 2018, doi: 10.1016/j.engfracmech.2017.12.015.
- [33] M. A. Sutton, J. J. Orteu, and H. Schreier, *Image correlation for shape, motion and deformation measurements: basic concepts, theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [34] T. Abdelouahed, 'Improved theoretical solution for interfacial stresses in concrete beams strengthened with FRP plate', *Int. J. Solids Struct.*, vol. 43, no. 14, pp. 4154–4174, Jul. 2006, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.03.074.
- [35] A. Benachour, S. Benyoucef, A. Tounsi, and E. A. Adda bedia, 'Interfacial stress analysis of steel beams reinforced with bonded prestressed FRP plate', *Eng. Struct.*, vol. 30, no. 11, pp. 3305–3315, Nov. 2008, doi: 10.1016/j.engstruct.2008.05.007.
- [36] B. Guenaneche, A. Tounsi, and E. A. A. Bedia, 'Effect of shear deformation on interfacial stress analysis in plated beams under arbitrary loading', *Int. J. Adhes. Adhes.*, vol. 48, pp. 1–13, Jan. 2014, doi: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.016.
- [37] A. Tounsi and S. Benyoucef, 'Interfacial stresses in externally FRP-plated concrete beams', *Int. J. Adhes. Adhes.*, vol. 27, no. 3, pp. 207–215, Apr. 2007, doi: 10.1016/j.ijadhadh.2006.01.009.
- [38] J. Wang and C. Zhang, 'Nonlinear fracture mechanics of flexural–shear crack induced debonding of FRP strengthened concrete beams', *Int. J. Solids Struct.*, vol. 45, no. 10, pp. 2916–2936, May 2008, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.01.004.