

Prédiction de la multi-fissuration des bétons fibrés grâce à la théorie de Weibull

Romain Gontero¹

¹ LMDC - Université Toulouse III - INSA - CEA - Université Laval

R. Gontero (gontero@insa-toulouse.fr)

ABSTRACT Les bétons fibrés à ultra hautes performances (BFUP) permettent d'apporter une réponse aux problèmes liés à la durabilité des ouvrages, notamment de par leur squelette granulaire compact et leur faible rapport eau sur liant, qui permettent de fortement réduire la porosité accessible à l'eau et de leur conférer des résistances accrues. En traction, le phénomène de micro-fissuration diffuse, obtenu par l'ajout de fibres réparties, entraîne une ductilité importante du matériau, ce qui autorise l'absence d'armatures, permettant ainsi leur mise en œuvre dans des coffrages complexes et offrant d'excellentes performances en situation sismique. Les applications industrielles de ce matériau se développent fortement, car il constitue un progrès important en terme de durée de vie, et de coût de maintenance des ouvrages. Tout ceci en fait un matériau qui semble idéal au premier abord, mais c'est sans compter sur la difficulté que représente sa justification vis-à-vis de la tenue structurelle. Depuis peu, il est possible d'utiliser les BFUP en tant qu'éléments de structures, sous réserve de réaliser une série d'essais conséquente. La mise au point d'un outil numérique permettant de prédire et de reproduire le comportement des BFUP à l'échelle de l'ouvrage est donc un enjeu essentiel au développement de son utilisation. Il est donc proposé ici une méthode permettant de modéliser le comportement mécanique post-fissuration des bétons fibrés, et notamment la phase de multi-fissuration grâce à la théorie d'effet d'échelle de Weibull.

Keywords Bétons fibrés, Modélisation, Weibull, Multi-fissuration

I. INTRODUCTION

L'un des principaux atouts des bétons fibrés à ultra hautes performances est leur grande durabilité obtenue par une porosité accessible à l'eau très faible. Néanmoins, la fissuration du béton rend possible la pénétration d'agents chimiques nuisant à la pérennité des structures et doit de ce fait être contrôlée. Les bétons fibrés sont souvent caractérisés par un phénomène de micro-fissuration diffuse permettant ainsi de limiter ces ouvertures de fissures. La représentation numérique de cette multi-fissuration à l'échelle de la structure reste un problème mal solutionné dans les modèles actuels Wuest (2007) Guenet (2016). Le modèle développé ici propose donc une méthode permettant de prédire le phénomène de multi-fissuration dans des éléments finis de grandes dimensions. Durant la phase post-fissuration, le comportement des bétons fibrés est régi par le phénomène d'extraction des fibres. La modélisation de l'extraction de fibres droites s'appuie sur des modèles de la littérature avec un nouvel apport concernant la phase post-pic. Puis les effets de l'inclinaison des fibres par rapport à la direction d'extraction sont ajoutés. L'expression des couples forces-ouvertures de fissures pour des fibres uniques permet par la suite d'accéder à la loi contrainte-ouverture de fissure d'un ensemble de fibres caractérisées par une orientation éventuellement anisotrope. Enfin, le passage à l'échelle de la structure se base sur l'utilisation de la loi d'effet d'échelle de Weibull (1951) afin de considérer la dis-

persion des résistances du béton qui conduit alors à une loi de comportement des fibres propre à chacun des plans de multi-fissuration et à une distribution non uniforme des ouvertures de fissures. L'ensemble des mécanismes ne pouvant pas être détaillés ici, on s'attachera parfois à une simple description de ces derniers.

II. MODÉLISATION DE L'EXTRACTION DES FIBRES

A. Fibres non inclinées

On s'intéresse dans un premier temps à une fibre rectiligne et cylindrique extraite d'une matrice cimentaire selon son axe. Cette extraction se décompose en trois phases : la première est une phase d'élasticité linéaire obtenue par cisaillement de l'interface fibre-matrice. La seconde est une phase de décollement progressif de cette interface. Enfin, lorsque la fibre est entièrement décollée, elle est arrachée hors de la matrice. Zhan & Meschke (2014) proposent une description de ces phénomènes permettant d'obtenir le couple force-glisement relatif fibre-matrice durant la phase d'élasticité et de décollement. Cette description est adoptée dans le modèle. Concernant la phase d'arrachement, une loi phénoménologique s'appuyant sur l'observation d'essais d'extraction de fibres uniques est proposée. Durant cette phase, la contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice devient une fonction du glissement et peut être décomposée en trois termes relatifs à trois phénomènes. Le premier correspond à l'abrasion de la matrice générée par la mise en mouvement de la fibre dans sa cavité provoquant une diminution de la contrainte de cisaillement. Le second concerne l'éventuelle accumulation de ces particules venant gêner le glissement et conduisant à une augmentation modérée de la contrainte d'interface. Enfin, il est observé que la méthode de fabrication des fibres peut conduire à la présence de défauts d'extrémité générant une accroche en bout de fibre et induisant une forte augmentation de la contrainte en fin d'extraction. Une expression analytique de l'évolution de la contrainte de cisaillement τ_p en fonction du glissement d'extraction s_p est ainsi proposée (2.1), avec τ_d la contrainte de frottement de la zone décollée, s_k un glissement caractéristique permettant de piloter la vitesse de la phase d'abrasion, M_0 le module d'écroutissage relatif à l'accumulation de particules, L_0 une longueur caractéristique permettant de prendre en compte l'impact de la longueur ancrée sur l'abrasion, f_0 une force constante qui représente l'influence d'un éventuel défaut situé à l'extrémité de la fibre, L la longueur ancrée de la fibre, et ϕ_f son diamètre. La figure 1 a) présente une corrélation expérimentale du modèle en force-ouverture de fissure pour trois essais d'extraction de fibres ancrées de 10 mm, 20 mm et 30 mm dans un béton hautes performances, et montre ainsi la capacité de la loi à reproduire le comportement d'une fibre en phase pré-pic et post-pic pour plusieurs longueurs ancrées.

$$\tau_p(s_p) = \underbrace{\tau_d \frac{s_k}{s_k + s_p}}_{\text{Abrasion}} + \underbrace{M_0 \frac{s_p L}{(L + L_0)^2}}_{\text{Accumulation de particules}} + \underbrace{\frac{f_0}{\pi \phi_f (L - s_p)}}_{\text{Défaut d'extrémité}} \quad (2.1)$$

B. Effets de l'inclinaison des fibres

L'inclinaison des fibres par rapport à la direction d'extraction entraîne deux conséquences. La première est une augmentation de la force au pic qui s'explique par un effet de courroie générant un frottement de plus en plus important lorsque l'inclinaison augmente ainsi que par l'apparition d'une rotule plastique dans la fibre au point d'extraction. Le second phénomène est une diminution de la rigidité lorsque l'angle d'inclinaison augmente. Ce dernier est expliqué par un phénomène d'écaillage qui est une rupture localisée de la matrice au point d'extraction de la fibre provoquée par une poussée au vide, conduisant ainsi à un déplacement du

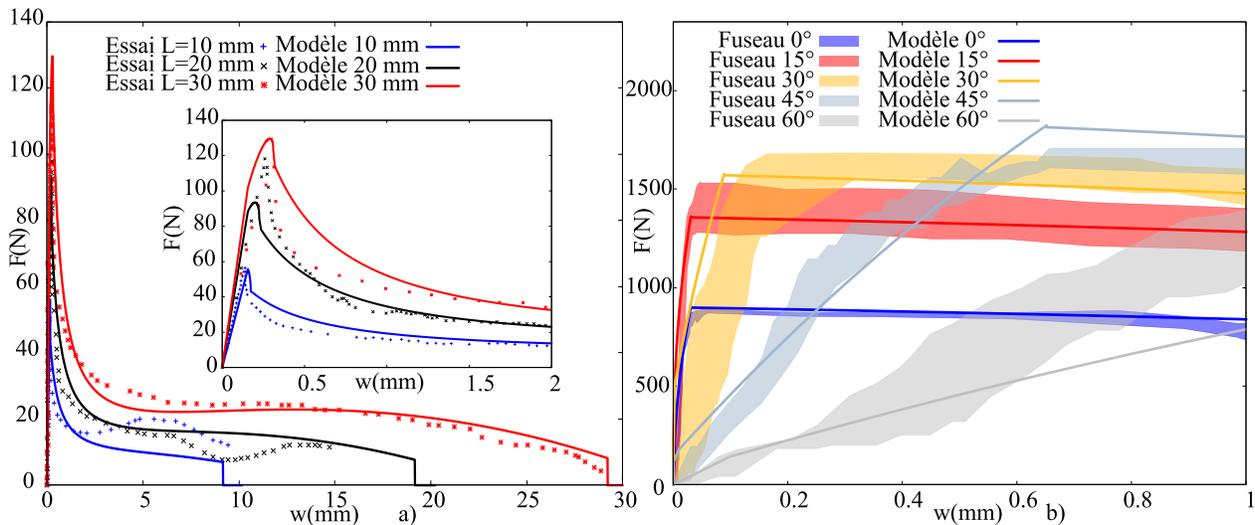


FIGURE 1. Comparaison des forces théoriques et expérimentales a) fibres droites pour trois longueurs ancrées Deng et al. (2018), b) fibres inclinées pour cinq inclinaisons Lee et al. (2010)

point d'extraction de la fibre et donc à une diminution de la rigidité. Par un équilibre des forces mises en jeu, la force F_φ nécessaire à l'extraction d'une fibre inclinée d'un angle φ par rapport à la direction d'extraction est exprimée en fonction de la force d'extraction d'une fibre droite F_m , d'un coefficient de frottement fibre-matrice μ , et de la force nécessaire pour plastifier la fibre inclinée lors de son extraction F_{PH} (2.2). A partir de l'expression de cette force, la modélisation de l'écaillage est réalisée en supposant l'arrachement d'un bloc de béton dont la surface de rupture a atteint sa résistance à la traction. La figure 1 b) présente une validation expérimentale du modèle d'extraction de fibres inclinées pour des essais d'extraction de groupes de fibres pour cinq inclinaisons. On constate alors que le modèle reproduit fidèlement les variations de forces et de rigidité quelle que soit l'inclinaison des fibres.

$$F_\varphi = \frac{F_m + F_{PH}}{1 - \mu \sin \varphi} \quad (2.2)$$

III. CONTRAINTE REPRISSE PAR UN ENSEMBLE DE FIBRES

Connaissant la force reprise par une fibre pour une inclinaison donnée, il est par la suite nécessaire d'obtenir la force totale reprise par un ensemble de fibres appartenant à un élément à l'échelle de la structure. L'ancrage de toutes les fibres individuelles par rapport à un plan de fissuration ne peut pas être déterminé. Cependant, compte tenu du grand nombre de fibres, l'ancrage moyen peut être approché par une loi probabiliste. Chaque ancrage étant équiprobable, la force moyenne résultant d'un ensemble d'ancrages variables peut être obtenue en calculant la moyenne de chacune des forces élémentaires. Il est par la suite nécessaire de prendre en compte l'hétérogénéité des orientations de fibres. Pour cela, on représente l'orientation des fibres par un ellipsoïde défini par trois valeurs et directions principales. La densité volumique de fibres dans une direction donnée est alors définie comme étant proportionnelle au rayon de l'ellipse dans cette direction. L'intégration dans toutes les directions de l'espace est alors approchée en discrétisant la sphère unité en un nombre fini d'angles solides. La contribution des fibres est calculée sur chacun des angles solides permettant ainsi d'accéder à la contrainte totale reprise par les fibres traversant une fissure. La figure 2 représente à gauche un ellipsoïde d'orientation anisotrope des fibres ainsi que le rayon de l'ellipsoïde en fonction des

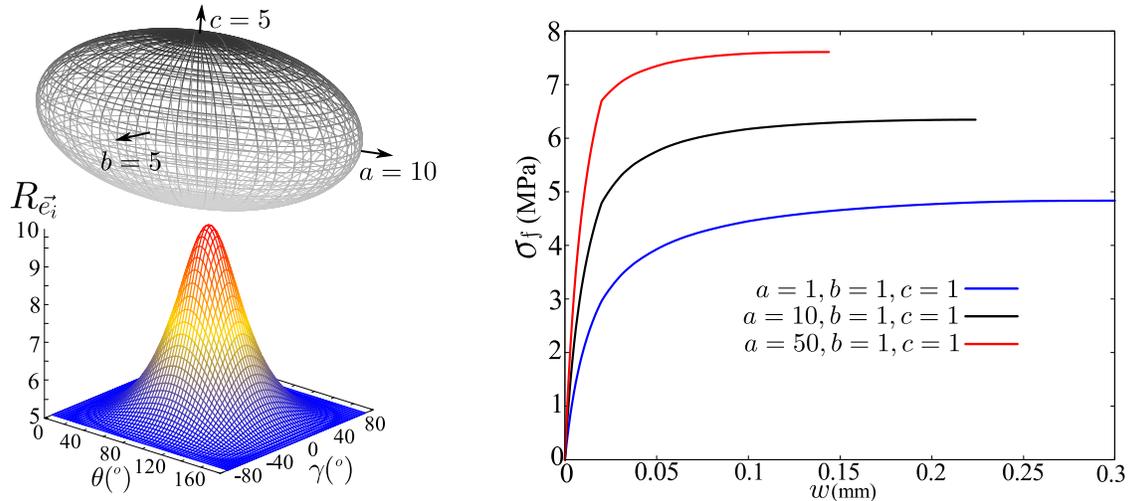


FIGURE 2. Ellipsoïde d'orientation des fibres dans l'espace, effet de l'inclinaison moyenne sur la loi de comportement en traction des fibres pour une densité volumique constante

angles θ et γ qui définissent le repère sphérique. À droite, la loi de comportement contrainte-ouverture de fissure est tracée jusqu'au pic de contrainte pour trois ellipsoïdes d'orientation, induisant une variation de l'angle moyen d'inclinaison des fibres, la direction a étant colinéaire à la normale au plan de fissuration. On constate que le fait d'orienter les fibres dans la direction de traction conduit à une augmentation de la rigidité et de la contrainte au pic ainsi qu'à une diminution de l'ouverture de fissure au pic.

IV. MULTI-FISSURATION

En mécanique, on observe que lorsque le volume sollicité d'un élément diminue, sa résistance augmente, ceci étant lié à une plus faible probabilité de défauts dans le matériau. Le modèle de Weibull permet de traduire cet effet en donnant la résistance d'un volume sollicité obtenue sur la base d'une moyenne et d'un écart-type des résistances d'un volume de référence. Initialement définie en terme de volumes, la loi de Weibull peut être, dans le cas présent, réduite à la dimension d'une longueur dans chacune des directions principales de fissuration. En effet, entre deux plans de fissuration, le volume de béton sollicité ne dépend que de la distance entre les fissures. La loi de Weibull peut alors s'écrire dans la direction I par la relation (4.1), avec $R_{t,k}$ la résistance d'un plan de fissuration donné, $R_{t,ref}$ la résistance moyenne obtenue sur un échantillon de longueur l_{ech} , $S_{w,I}$ l'espacement entre deux plans de fissuration adjacents et m le paramètre de Weibull, relié à l'écart-type de la distribution des résistances de l'échantillon de référence.

$$R_{t,k} = R_{t,ref} \left(\frac{l_{ech}}{S_{w,I}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (4.1)$$

Lorsque la contrainte totale dans l'élément dans la direction I devient supérieure ou égale à la résistance à la traction $R_{t,k}$, de nouvelles fissures apparaissent. À partir de la relation 4.1, il est alors possible d'exprimer l'espacement entre les fissures en fonction de la contrainte totale σ_I (équation 4.2). La figure 3 représente l'évolution de l'espacement entre les fissures normalisé par la longueur de l'échantillon en fonction de la contrainte totale de traction dans la direction I pour trois valeurs du paramètre m . On constate alors que lorsque la contrainte augmente, l'espacement entre les fissures diminue et tend vers zéro à une

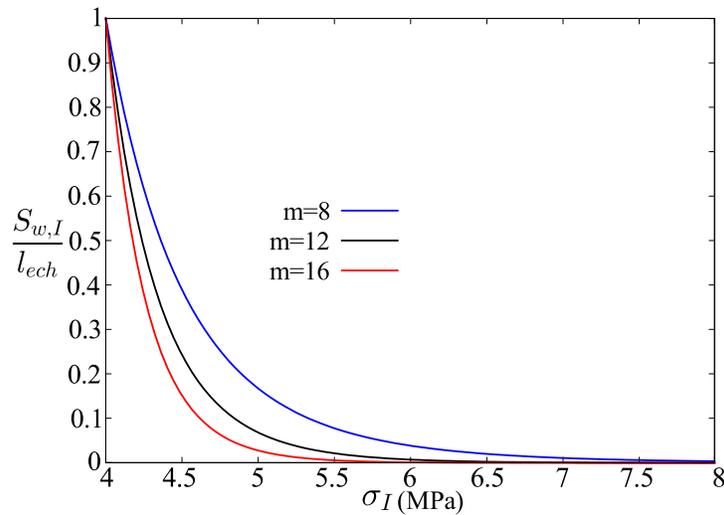


FIGURE 3. Évolution de l’espacement entre les fissures normalisé par la longueur de l’échantillon en fonction de la contrainte totale pour une résistance de référence du béton de 4 MPa

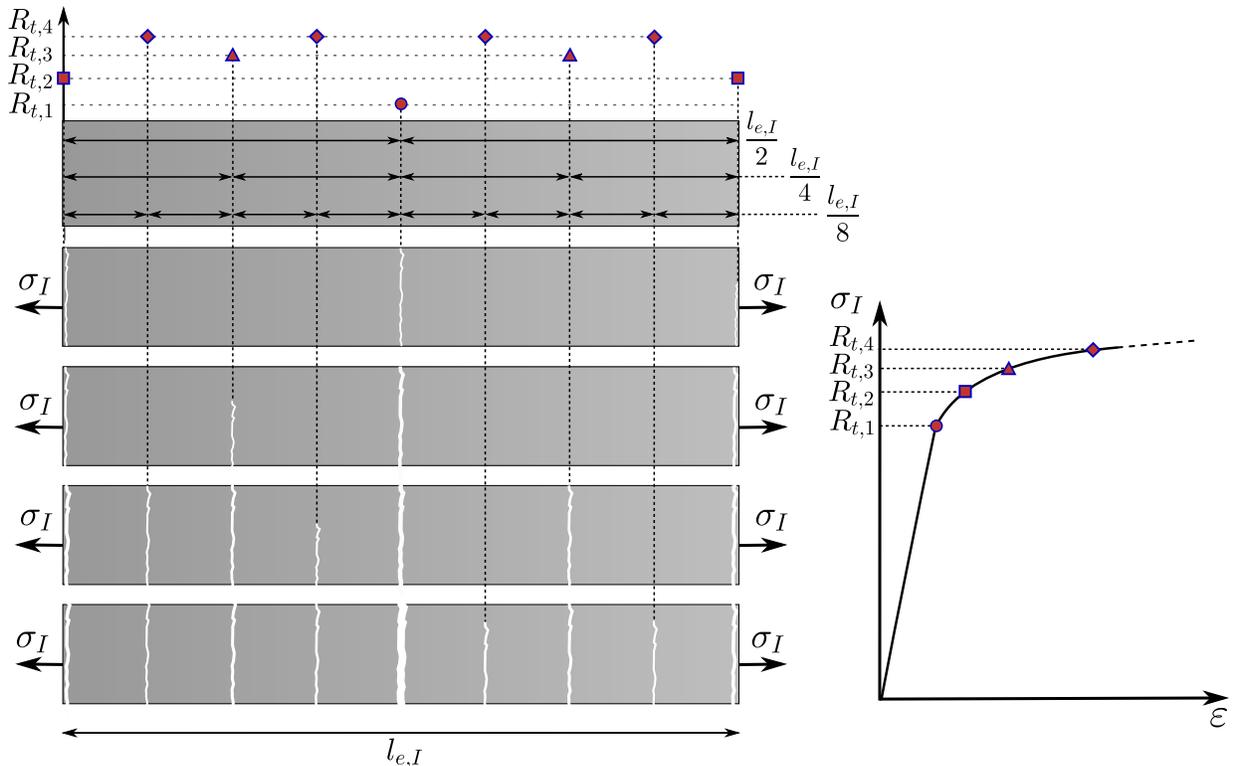
vitesse dépendant du paramètre m .

$$S_{w,I} = l_{ech} \left(\frac{R_{t,ref}}{\sigma_I} \right)^m \quad (4.2)$$

A partir de cette loi d’espacement des fissures, il est possible de déterminer le nombre de fissures qui se produisent effectivement. Pour ce faire, on considère un élément de longueur $l_{e,I}$ dans la direction principale de fissuration I possédant initialement une fissure en son centre. Lorsque la contrainte de traction augmente, d’autres fissures se forment. D’un point de vue statistique, chaque nouvelle fissure se produit en moyenne à la distance la plus élevée des fissures existantes. En supposant que la première fissure se trouve au centre, la distance la plus élevée pour une nouvelle fissure appartenant à l’élément est $\frac{l_{e,I}}{2}$. Deux points appartenant à l’élément sont situés à cette distance, il se produira ainsi deux nouvelles fissures. Puis, si la contrainte augmente suffisamment à nouveau, deux nouvelles fissures espacées de $\frac{l_{e,I}}{4}$ pourront se produire et ainsi de suite. Connaissant les espacements auxquels se produisent les fissures, il est possible de déterminer les résistances à la traction de chacune des sections $R_{t,k}$. Cette méthode implique donc que plusieurs fissures caractérisées par une même résistance à la traction se produisent simultanément, or la muti-fissuration est un phénomène progressif. Afin de représenter le phénomène de manière réaliste, le nombre de fissures associées à une même résistance est exprimé par une fonction de l’espacement des fissures. Ceci peut se traduire ainsi : lorsque la résistance d’un groupe de fissures est atteinte, une seule d’entre elles commence à s’ouvrir, puis le nombre de fissures augmente progressivement jusqu’à atteindre le nombre total de fissures potentielles du groupe. Ce nombre total est obtenu au moment où la résistance du groupe de fissures suivant est atteinte, assurant ainsi la continuité de l’évolution. Le tableau 1 donne l’évolution du nombre de fissures et de leur espacement en fonction de la contrainte totale σ_I . La figure 4 permet de visualiser cette évolution sur un élément en traction simple. Il a été évoqué précédemment que la loi de comportement des fibres dépend d’un phénomène d’écaillage de la matrice qui est piloté en partie par la résistance à la traction du béton. Or d’après la loi de Weibull, la résistance à la traction varie pour chaque plan de fissuration, il en est donc de même pour la réponse des fibres. La figure 5 a) fait apparaître les lois de comportement des fibres pour une seule fissure pour différentes résistances à

TABLE 1. Évolution de nombre de fissures $n_{c,I}(R_{t,k})$ en fonction de la contrainte principale de traction dans la direction I

σ_I	$R_{t,1}$	$R_{t,2} \rightarrow R_{t,3}$	$R_{t,3} \rightarrow R_{t,4}$...	$R_{t,k} \rightarrow R_{t,k+1}$
$n_{c,I}(R_{t,k})$	1	$0 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow 2$...	$0 \rightarrow 2^{k-2}$
$S_{w,I}$	$l_{e,I}$	$\frac{l_{e,I}}{2} \rightarrow \frac{l_{e,I}}{4}$	$\frac{l_{e,I}}{4} \rightarrow \frac{l_{e,I}}{8}$...	$\frac{l_{e,I}}{2^{k-1}} \rightarrow \frac{l_{e,I}}{2^k}$

**FIGURE 4.** Évolution du nombre de fissures dans un élément au cours du chargement

la traction et deux types d'orientations préférentielles des fibres. On constate bien qu'à contrainte égale, les ouvertures de fissures de chaque plan de fissuration différent. L'équilibre des contraintes devant être vérifié, ceci conduit donc à une dispersion des ouvertures de fissures dans les bétons fibrés multi-fissurés. Ce phénomène initialement observé par Wu & Li (1995) peut désormais être représenté. La figure 5 b) c) permet de comparer les allures des distributions d'ouvertures de fissures expérimentales et modélisées normalisés par le nombre maximal de fissures $n_{c,max}$, la comparaison des valeurs n'étant ici pas pertinente car les bétons et fibres sont différents. On remarque que les allures des distributions sont identiques, un grand nombre de fissures présentent de petites ouvertures, tandis qu'un faible nombre sont très ouvertes. Le nombre de fissures du groupe de fissures les moins ouvertes n'a pas atteint son maximum, car la localisation de la fissuration s'est produite durant son développement. Ce type de résultat est donc une nouvelle étape dans la modélisation précise de l'état de fissuration des bétons fibrés.

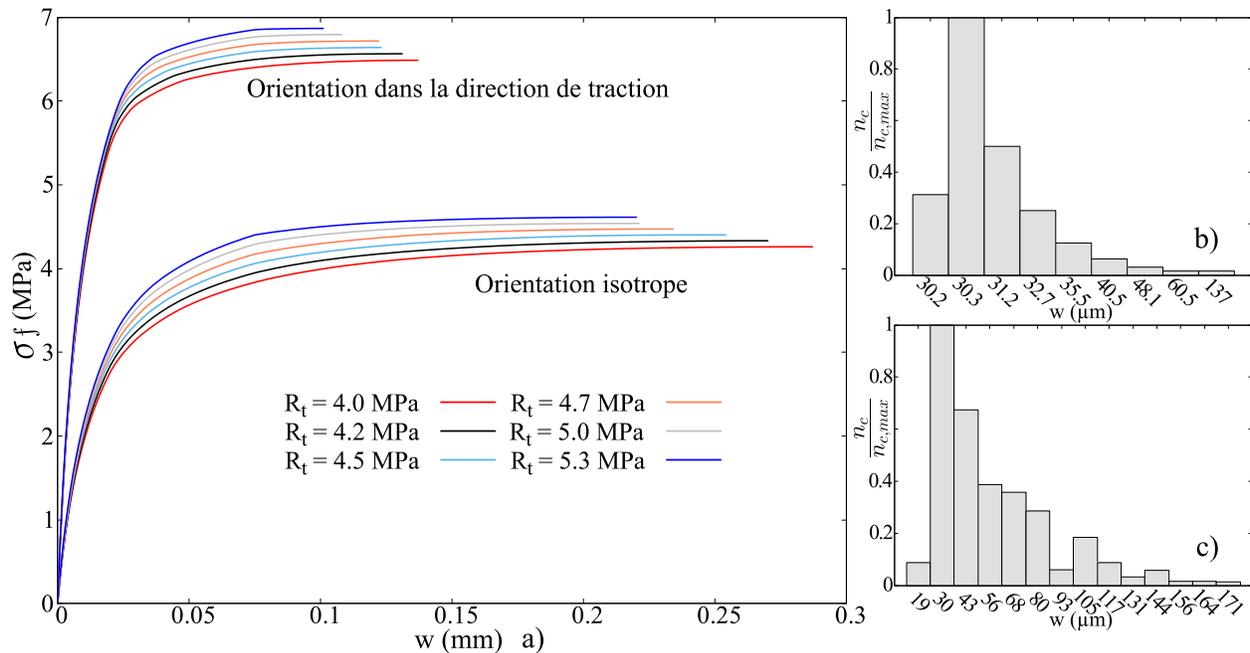


FIGURE 5. a) Influence de la résistance en traction des sections fissurées sur la loi de comportement des fibres, allures des distributions des ouvertures de fissures b) modèle , c) expérimental Wu & Li (1995)

V. VALIDATION EXPÉRIMENTALE

Le modèle est confronté à des résultats d'essais réalisés par Chen et al. (2021) sur des éléments en BFUP. Les auteurs effectuent aussi des essais d'extraction de groupes de fibres suivant plusieurs inclinaisons, ce qui permet de calibrer les paramètres du modèle. Puis ils réalisent une série d'essais de traction directe sur des éprouvettes pour trois densités volumiques de fibres ρ_f . La figure 6 présente la validation expérimentale du modèle. En a), les essais d'extraction permettent de calibrer la plupart des paramètres du modèle qui sont par la suite utilisés afin de calculer la réponse en traction pour les trois dosages en fibres. En b), on constate une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et le modèle. Lorsque le dosage en fibres est faible, la localisation se produit très rapidement après l'apparition de la première fissure. Lorsqu'il augmente, la phase de multi-fissuration se développe, conduisant à une phase d'écroutissage positif.

VI. CONCLUSION

Un modèle de comportement des bétons fibrés a été présenté. Il s'appuie dans un premier temps sur la modélisation de la phase pré-pic de l'extraction de fibres non orientées décrit par Zhan & Meschke (2014). Puis un modèle permettant de représenter la phase post-pic de l'extraction des fibres est proposé. Par la suite, une méthode permettant de prendre en compte les effets de l'orientation des fibres est ajoutée. Par une méthode de discrétisation des orientations des fibres, la réponse lors de l'extraction d'un ensemble de fibres est obtenue. Enfin, une loi d'effet d'échelle est introduite afin de représenter le phénomène de multi-fissuration des bétons fibrés. Cette loi conduit à considérer une distribution non uniforme des ouvertures de fissures, observée expérimentalement mais dont la description faisait jusqu'alors défaut. Ce type de modèle conduit alors à une nouvelle représentation de l'état de fissuration des bétons fibrés, permettant ainsi de se prononcer de manière plus fiable sur l'état de dégradation et la durabilité des structures en béton fibré.

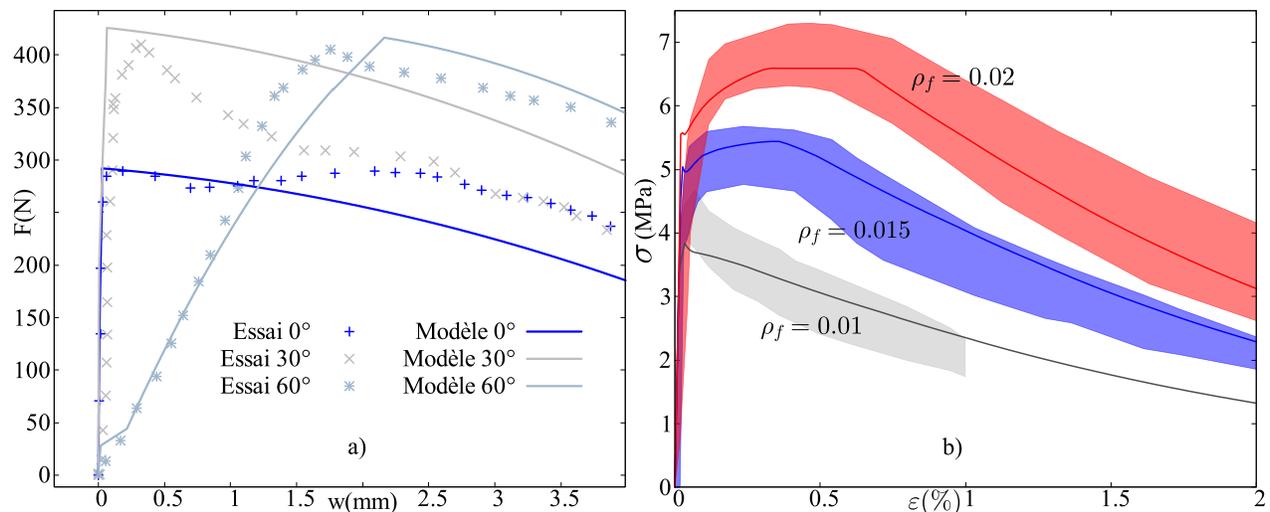


FIGURE 6. Validation expérimentale du modèle de multi-fissuration des bétons fibrés a) essais d'extraction, b) essais de traction directe Chen et al. (2021)

References

- Chen, L., Sun, W., Chen, B., Shi, Z., Lai, J. & Feng, J. (2021), 'Multiscale study of fibre orientation effect on pullout and tensile behavior of steel fibre reinforced concrete', *Construction and Building Materials* **283**, 122506.
 URL: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.122506>
- Deng, F., Ding, X., Chi, Y., Xu, L. & Wang, L. (2018), 'The pull-out behavior of straight and hooked-end steel fiber from hybrid fiber reinforced cementitious composite : Experimental study and analytical modelling', *Composite Structures* **206**(June), 693–712.
 URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.08.066>
- Guenet, T. (2016), 'Modélisation du comportement des bétons fibrés à ultra-hautes performances par la micromécanique : effet de l'orientation des fibres à l'échelle de la structure, thèse IFSTTAR Paris'.
- Lee, Y., Kang, S.-t. & Kim, J.-k. (2010), 'Pullout behavior of inclined steel fiber in an ultra-high strength cementitious matrix', *Construction and Building Materials* **24**(10), 2030–2041.
 URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2010.03.009>
- Weibull, W. (1951), 'A statistical distribution function of wide applicability', *Journal of Applied Mechanics – ASME* **18**, 12–23.
- Wu, H. & Li, V. (1995), 'Stochastic process of multiple cracking in discontinuous random fiber reinforced brittle matrix composites', *International journal of damage mechanics* **4**, 83–102.
- Wuest, J. (2007), 'Comportement structural des bétons de fibres ultra performants en traction dans des éléments composés, thèse EPFL'.
- Zhan, Y. & Meschke, G. (2014), 'Analytical model for the pullout behavior of straight and hooked-end steel fibers', *Journal of Engineering Mechanics* **140**(12), 04014091.