

Evaluation des modèles 2D d'homogénéisation pour le contrôle non destructif ultrasonore du béton

Nouhayla Khalid¹, Michel Darmon¹, Jean-François Chaix²

¹ Université Paris-Saclay, CEA, List, F-91120 Palaiseau France

² Aix Marseille Université, Avenue Gaston Berger, 13625 Aix-En-Provence, France

RESUME La simulation du contrôle non destructif (CND) par ultrasons joue un rôle important dans les évaluations et contrôles des structures en béton. Le béton est un milieu composite : la présence d'hétérogénéités conduit à la dispersion et à l'atténuation des ondes ultrasonores. Cela a un effet important sur le contrôle. Par conséquent, il est important de modéliser avec précision l'atténuation des ondes due à la diffusion par les différents composants présents dans le béton (granulats, porosités, microfissures...). Les méthodes ultrasonores classiquement utilisées reposent sur l'étude de l'onde cohérente caractérisée par sa vitesse et son atténuation. Cette onde peut être simulée à l'aide de modèles numériques ou analytiques. Les modèles numériques sont plus performants mais très coûteux dans le cas 3D, et le besoin de mettre en place une simulation rapide de contrôles conduit à une nécessité d'améliorer les modèles analytiques 3D simplifiés, où le champ ultrasonore total dépend fortement des positions des obstacles. En guise d'amélioration des modèles analytiques, on cherche à étudier les effets de la corrélation des positions des diffuseurs. Dans le présent travail, nous proposons d'évaluer précisément le modèle d'homogénéisation existant le plus adapté à une forte concentration de diffuseurs. Une comparaison entre ce modèle et un code d'éléments finis 2D en cours de développement dans le logiciel de simulation CIVA NDT est présentée.

Mots-clefs contrôle non-destructif, béton, diffusion multiple, ultrasons, simulation.

I. INTRODUCTION

Le contrôle non destructif par ultrasons est aujourd'hui largement utilisé pour concevoir des inspections de structures en béton. L'objectif est d'évaluer les dommages subis par le béton sans l'altérer de manière permanente. Cet aspect est d'une importance cruciale pour le contrôle des ponts, des barrages, des bases d'éoliennes et de tours dans le domaine du génie civil ou pour le diagnostic de la structure en béton des centrales nucléaires par exemple. Cependant, la complexité du matériau (présence de différentes hétérogénéités : agrégats, porosités, microfissures) nécessite une modélisation précise des ondes diffusées par ces hétérogénéités. En raison des nombreux obstacles présents dans le béton, le phénomène de diffusion multiple est alors pris en compte. Des outils de prédiction particulièrement rapides ont été développés afin de simuler la propagation des ondes élastiques dans le béton. Le code d'éléments finis 2D [Dorval et al., 2022] en cours de développement dans le logiciel de simulation CIVA NDT et le code SPECFEM 2D [Komatitsch et al., 1999] sont des exemples d'approches numériques basées sur la méthode des éléments finis (FEM). Prospero [Chekroun et al., 2012] [Ramaniraka et al., 2019] est basé sur la méthode des

différences finies. Les approches numériques sont plus efficaces mais restent limitées dans le cas 3D (diffusion multiple par des obstacles sphériques) par leur temps de calcul. Par conséquent, les méthodes d'homogénéisation semi-analytiques sont considérées comme une solution pratique pour mettre en place une simulation 3D rapide. Ces méthodes sont basées sur l'étude de l'onde cohérente moyenne, et les paramètres observables sont l'atténuation et la vitesse de phase de cette onde. Ici, nous nous concentrons sur une modélisation analytique en 2D : la diffusion multiple par des obstacles cylindriques. La validation de cette approche dans le cas 2D permettra d'envisager dans le futur l'utilisation de techniques similaires pour la modélisation analytique 3D.

Il existe de nombreux modèles d'homogénéisation différents dans la littérature. Foldy [Foldy, 1945] a initié une approche stochastique intégrant le phénomène de la diffusion multiple. Watermann et Truell [Watermann et al., 1961] ont modifié la théorie de Foldy et l'ont étendue au cas des diffuseurs anisotropes. Ces deux derniers modèles considèrent des particules indépendantes, et donc aucune fonction de corrélation entre les diffuseurs n'est prise en compte. En 1964, Fikioris et Waterman [Fikioris et al., 1964] ont modifié la description de la position des particules diffusantes. Elles ne sont plus indépendantes et une fonction de corrélation permet de décrire la distribution des distances entre deux diffuseurs voisins. La fonction utilisée est la plus simple, elle est appelée la Hole Correction. Elle permet de respecter la condition obligatoire de non-interpénétration entre les disques durs en introduisant la distance d'exclusion autorisée entre les centres de deux diffuseurs adjacents. Sur la base de la théorie de Fikioris et Waterman, Linton et Martin [Linton et al., 2005] ont proposé plus récemment un modèle dérivé dans le cas de la diffusion multiple acoustique. Conoir et Norris [Conoir et al., 2010] ont étendu le même modèle au cas élastique.

Cet article propose d'évaluer le modèle de Conoir et Norris pour les structures en béton, et de comparer les résultats de la modélisation analytique avec ceux des éléments finis numériques en 2D. Pour la simulation numérique, le code numérique d'éléments finis 2D en cours de développement dans le logiciel de simulation CIVA NDT et le progiciel SPECFEM 2D ont été utilisés. La section II décrit la théorie de la diffusion multiple et le modèle d'homogénéisation. L'évaluation de ce modèle et ses limites pour les structures en béton sont présentées dans la section III. Dans la section IV, les limites observées dans les simulations analytiques sont analysées. Enfin, des conclusions et des perspectives de travail sont présentées à la section V.

II. DIFFUSION MULTIPLE ET MODELES D'HOMOGENEISATION

La théorie de l'homogénéisation consiste à remplacer un milieu hétérogène par une distribution aléatoire d'hétérogénéités simplifiées, puis à assimiler ce milieu géométrique à un milieu de référence efficace homogène (Fig. 1). Cette théorie permet d'extraire des paramètres effectifs homogènes à partir de milieux désordonnés ou hétérogènes.

Dans cette étude, nous considérons des géométries cylindriques. Les diffuseurs sont alors des cylindres de granulats répartis aléatoirement dans une matrice de ciment. Les deux matériaux sont caractérisés par leur masse volumique ρ et les vitesses des ondes longitudinales et transversales, respectivement c_L et c_T . Leurs propriétés sont illustrées dans le Tableau 1 ci-dessous.

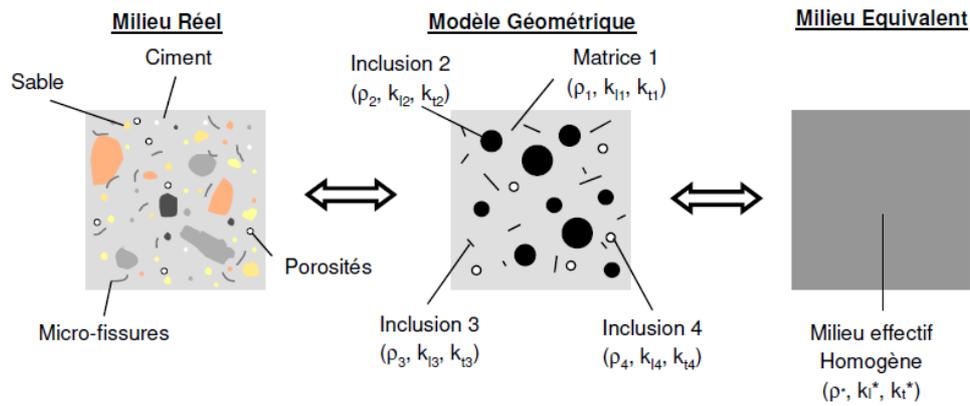


FIGURE 1. Milieu réel, modèle géométrique et milieu homogène équivalent

TABLEAU 1. Paramètres des matériaux

matrice	ρ ($Kg.m^{-3}$)	c_L ($m.s^{-1}$)	c_T ($m.s^{-1}$)
Ciment	2050	3950	2250
Agrégats	2610	4300	2475

Les caractéristiques effectives de l'onde incidente longitudinale, c'est-à-dire la vitesse de phase c et l'atténuation α , sont définies à partir du nombre d'ondes complexe effectif k_{eff} :

$$k_{eff} = \frac{2\pi f}{c} + i\alpha. \quad (1)$$

avec f est la fréquence de l'onde émise.

A. Le modèle de Conoir et Norris

On considère N diffuseurs cylindriques identiques de rayon $a = 6\text{ mm}$ situés aux points r_1, r_2, \dots, r_N . Ils sont uniformément répartis sur un milieu semi-infini de surface S . Les positions des N cylindres dépendent les uns des autres. On note n_0 la densité des diffuseurs, et nous définissons la distance d'exclusion b comme la distance minimale autorisée entre les centres de deux diffuseurs adjacents (Fig. 2).

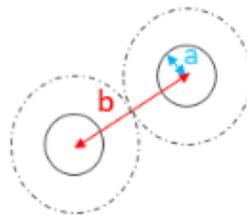


FIGURE 2. Distance d'exclusion

Selon le théorème de Thue [Chang et al., 2010], la fraction surfacique maximale qui peut être atteinte en deux dimensions (pour une surface parfaitement périodique, maille hexagonale) est la suivante $\phi_{max} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.907$ [Rohfritsch, 2021][Chang et al., 2010]. Ainsi, nécessairement, $\phi_b \leq \phi_{max}$, qui impose pour un ensemble de diffuseurs cylindriques [Rohfritsch, 2021] :

$$b \leq b_{max} = 2a \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{12}\phi}} \approx 2a \sqrt{\frac{0.907}{\phi}}. \quad (2)$$

Afin de respecter la condition obligatoire de non-interpénétrabilité pour les cylindres durs, la distance b doit être au moins égale au diamètre du cylindre $b_{min} = 2a$. Par conséquent, la distance d'exclusion est bornée :

$$b_{min} \leq b \leq b_{max}. \quad (3)$$

La probabilité conditionnelle d'existence d'un diffuseur en un point r_2 sachant qu'un autre diffuseur est déjà situé à r_1 est choisie comme étant :

$$p(r_2 | r_1) = \begin{cases} 0, & R_{12} < b, \\ \frac{n_0 g(R_{12})}{N}, & R_{12} > b, \end{cases} \quad \text{avec } R_{12} = |r_2 - r_1|, \quad (4)$$

où la fonction g est la fonction de corrélation de paires. Le choix le plus simple de cette fonction est la hole correction (Fig. 3). Cette dernière permet de respecter la condition de non-interpénétration : au-delà de la distance d'exclusion b , il existe une équiprobabilité d'existence d'un diffuseur à une certaine distance d'un autre diffuseur. Nous utiliserons cette fonction pour la totalité de nos analyses.



FIGURE 3. La Hole Correction

On considère un milieu isotrope dans lequel peuvent se propager à la fois des ondes longitudinales et transversales. Le modèle utilisé pour nos applications est celui de Conoir et Norris [Conoir et al., 2010]. Il est développé à l'ordre 2 en concentration. Par conséquent, le nombre d'ondes complexe effectif k_{eff} pour une onde incidente longitudinale se propageant dans le milieu homogène équivalent peut être écrit selon la formule suivante [Conoir et al., 2010] :

$$k_{eff}^2 = k_L^2 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0^2, \quad (5)$$

k_L est le nombre d'onde dans la matrice, et δ_1 et δ_2 sont définis comme suit :

$$\delta_1 = -4i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^{LL}, \quad (5.1)$$

$$\delta_2 = -\frac{16}{k_L^2} \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} D_{m-n}^0(k_L) T_m^{LL} T_n^{LL} - \frac{8i\pi}{k_L^2 - k_T^2} \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} N_{p-q}^T(k_L) T_p^{TL} T_q^{LT}, \quad (5.2)$$

où :

$$D_p^0(k) = -\frac{i\pi}{4} \left[((kb)^2 - p^2) J_p(kb) H_p^{(1)}(kb) + (kb)^2 J_p'(kb) H_p^{(1)'}(kb) \right], \quad (5.3)$$

et

$$N_p^\alpha(k) = -kbJ_p'(kb)H_p^{(1)}(k_\alpha b) - k_\alpha bJ_p(kb)H_p^{(1)'}(k_\alpha b), \quad \alpha \in \{L, T\}. \quad (5.4)$$

$J_n(x)$ et $H_n^{(1)}(x)$ sont respectivement les fonctions de Bessel et de Hankel de premier espèce. Pour des diffuseurs cylindriques, les coefficients modaux T_n sont les coefficients de la T-matrice [Varadan et al., 1980]. Cette dernière est la matrice qui relie le champ diffusé au champ incident. L'expression de la T-matrice dans le cas de la diffusion par des diffuseurs cylindriques élastiques dans un milieu élastique est calculée en résolvant le problème aux conditions aux limites [Chekroun, 2007].

III. EVALUATION DES MODELES D'HOMOGENEISATION ELASTIQUES 2D POUR DES STRUCTURES DE BETON

Afin d'évaluer le modèle de Conoir et Norris (CN) pour les structures en béton, on peut étudier sa réponse en termes de vitesse de phase et d'atténuation, en fonction de la fréquence de l'onde incidente longitudinale, et en comparaison avec les deux outils numériques FEM : les logiciels CIVA FEM 2D et le logiciel SPECFEM 2D.

CIVA est une plate-forme de simulation et d'analyse des CND/SHM, qui comprend des outils de simulation pour différentes techniques de CND, notamment des modèles ultrasonores validés de manière intensive [Touillelan et al., 2016, Raillon et al., 2010]. Des modèles d'inspection ultrasonore [Dorval et al., 2012] basés sur le principe de réciprocité ont été conçus pour simuler la réponse ultrasonique des défauts pour diverses configurations de CND [Darmon et al., 2015].

CIVA FEM 2D est un code d'éléments finis élastodynamique transitoire intégré dans CIVA pour diverses applications, il permet en effet de simuler des inspections de défauts de type fissure [Imperiale et al., 2018, Darmon et al., 2022] avec une prédiction plus précise des ondes de tête que les modèles [Fradkin et al., 2016, Zernov et al., 2013, Fradkin et al., 2020] développés pour des formes canoniques ; il est désormais également adapté à la modélisation du béton [Dorval et al., 2022]. SPECFEM 2D est un code numérique basé sur des éléments spectraux [Komatitsch et al., 1999] qui a également été utilisé pour la simulation de la propagation des ondes dans le béton [Yu et al., 2019]. Les outils CIVA FEM 2D et SPECFEM 2D utilisent tous deux des éléments finis d'ordre élevé.

L'étude est réalisée pour des concentrations d'agrégats allant de 12% à 42%. La distance d'exclusion est fixée au diamètre du cylindre afin que la condition de non- interpénétration soit respectée.

Le milieu simulé est un béton composé d'une matrice de ciment dans laquelle sont introduites des particules diffusantes cylindriques (Tableau 1).

Nous observons (Fig. 4) un bon accord entre le modèle analytique CN et les deux modèles numériques pour des concentrations de 12 et 24%. Cependant, le désaccord augmente avec des concentrations plus élevées. Pour une concentration de 42%, nous remarquons non seulement un changement inattendu vers des valeurs négatives de l'atténuation effective dans le régime des basses fréquences, mais aussi une sous-estimation de ces valeurs dans le régime des hautes fréquences.

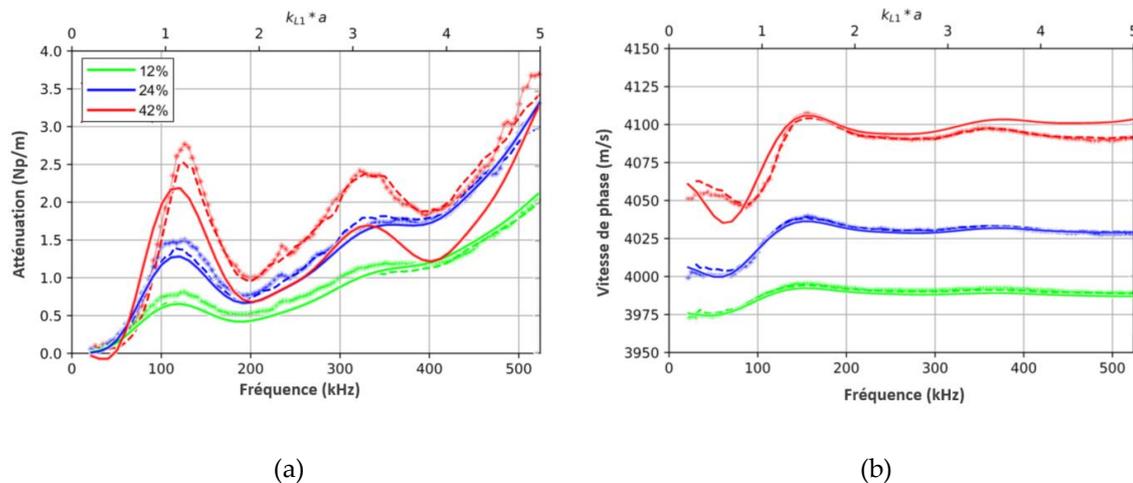


FIGURE 4. Atténuation (4a) et vitesse de phase (4b) en fonction de la fréquence pour une onde incidente longitudinale. Comparaison entre CN (traits pleins), CIVA 2D (pointillés), et SPECFEM 2D (étoiles).

IV. ETUDE DE LA CORRELATION ENTRE LES DIFFUSEURS

Afin d'analyser le passage à des valeurs négatives dans le régime des basses fréquences observé avec le modèle de Conoir et Norris, une étude de la corrélation entre les diffuseurs est proposée dans cette section. La valeur prise pour la distance d'exclusion est susceptible d'avoir un impact sur les propriétés effectives du milieu. Dans la simulation numérique, il est imposé que la distance d'exclusion doit non seulement respecter la condition de non-interpénétrabilité mais aussi qu'elle ne doit pas autoriser le contact entre deux diffuseurs adjacents ($b=2a$ est interdite). Autrement dit, la distance d'exclusion doit respecter la condition stricte $b > 2a$. Dans le modèle analytique, la valeur de la distance d'exclusion est fixée à $b=2a$; une possibilité de désaccord entre les modèles numériques et analytique pourrait être liée à une différence de distance d'exclusion entre les modèles. Par conséquent, nous commençons par tester différentes valeurs de la distance d'exclusion dans le modèle analytique et nous nous concentrons sur l'analyse de son effet sur l'atténuation en fonction des différents régimes de fréquence.

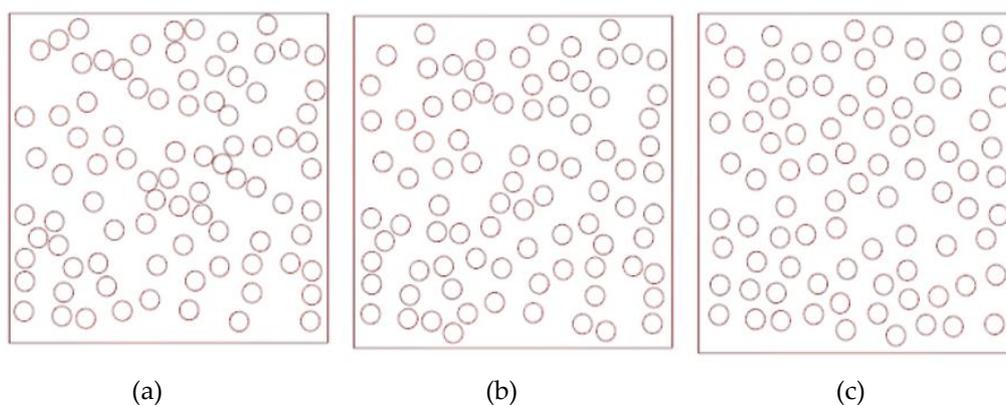


FIGURE 5. Distributions aléatoires de 24% d'agrégats dans une matrice de ciment pour différentes valeurs de b (distance d'exclusion) $b = 2a$ (5a), $b = 2.25a$ (5b) and $b = 2.65a$ (5c).

La distance d'exclusion est définie comme la distance minimale autorisée entre les centres de deux diffuseurs adjacents (Fig. 2). Quand la concentration des diffuseurs augmente, la distance d'exclusion doit converger vers sa valeur minimale, c'est-à-dire $b_{min} = 2a$. La figure 5 présente 3 exemples de distributions aléatoires des diffuseurs. Lorsque la concentration des diffuseurs atteint la densité maximale autorisée dans le milieu, la distance d'exclusion tend à être égale au diamètre du diffuseur. Cependant, la distance d'exclusion converge vers l'expression $b_{max} = 2a \sqrt{\frac{\phi_{max}}{\phi}}$ lorsque la densité diminue. Généralement, cette distance peut être choisie plus faible en fixant $b \leq b_{max}$.

Nous simulons le modèle analytique CN pour les mêmes valeurs de b dans la figure 5, afin d'évaluer l'effet de la distance d'exclusion sur l'atténuation effective en fonction des différents régimes de fréquence. Des valeurs arbitraires de la distance d'exclusion b ont été choisies dans la plage $b_{min} \leq b \leq b_{max}$.

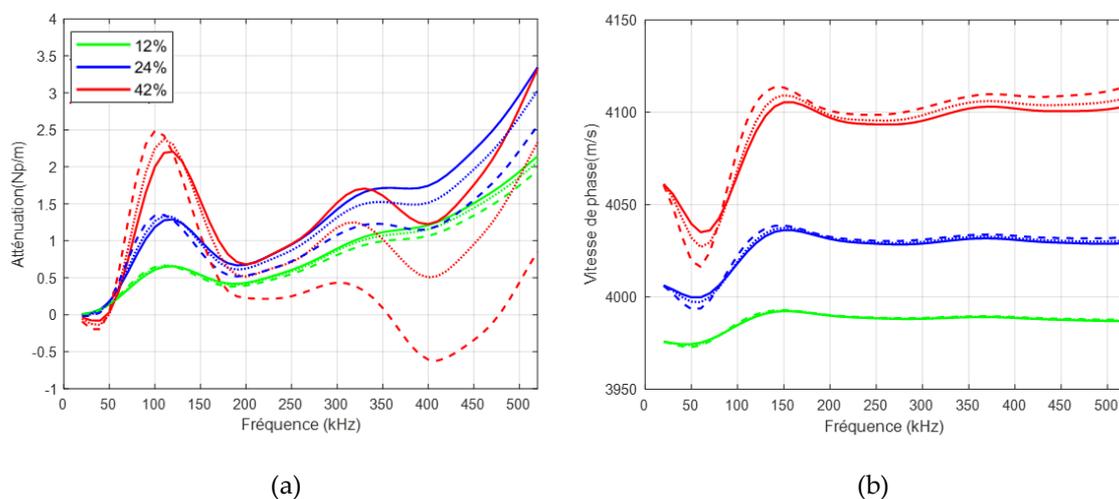


FIGURE 6. Atténuations effectives (6a) et vitesses de phase (6b) obtenues avec le modèle de Conoir et Norris pour différentes valeurs de distances d'exclusion $b = 2a$ (traits pleins —), $b = 2.25a$ (traits à points), and $b = 2.65a$ (traits pointillés ---).

La distance d'exclusion a un effet très remarquable notamment sur l'atténuation effective : lorsque la distance b augmente, l'atténuation effective diminue. Ce qui fait que les valeurs prédites de l'atténuation s'éloignent encore davantage des résultats de la simulation numérique. Par conséquent, en dépit de l'impact constaté par la modification de la distance d'exclusion sur les valeurs d'atténuation, cette modification ne permet pas de corriger le passage aux valeurs négatives de l'atténuation. On conclut que la valeur choisie pour la distance d'exclusion n'explique pas le passage aux valeurs négatives d'atténuation. Par conséquent, une étude plus poussée de la corrélation entre les diffuseurs est nécessaire. Les diffuseurs n'étant pas considérés indépendants, c'est la probabilité conditionnelle d'existence de diffuseurs (Eq. 4) qui décrit leur distribution dans le milieu étudié. Cette probabilité dépend de deux paramètres : la distance d'exclusion et la fonction de corrélation. Dans cette partie, on a montré que la modification de la distance d'exclusion n'explique pas l'invalidité des modèles analytiques. Afin de continuer l'étude de cette corrélation

entre diffuseurs, il est obligatoire d'étudier la fonction de corrélation. Cette dernière est simplifiée dans le modèle évalué dans cette étude, de façon à imposer une équiprobabilité des distances entre les diffuseurs. Or, en lançant plusieurs tirages de distributions aléatoires de diffuseurs, on ne constate pas une telle équiprobabilité. Il s'avèrera judicieux de décrire de manière plus réaliste la distribution des distances entre les diffuseurs.

V. CONCLUSION

La propagation de l'onde longitudinale dans un milieu hétérogène (béton) comprenant des diffuseurs élastiques cylindriques (agrégats) a été analysée. L'atténuation effective et la vitesse de phase sont évaluées à l'aide du modèle de Conoir et Norris (CN). Pour les basses fréquences, l'atténuation effective calculée montre un passage vers des valeurs négatives pour une concentration élevée de diffuseurs, ce qui n'est pas physique. Pour comprendre cette erreur de prédiction, il est nécessaire d'étudier la corrélation entre les positions des particules ; la distance d'exclusion entre les centres des diffuseurs possède un effet important sur les paramètres effectifs. Cette distance doit non seulement respecter la condition de non-interpénétrabilité pour les cylindres durs, mais aussi décrire la réalité de la distribution des diffuseurs. Cependant, même la modification de la distance d'exclusion ne permet pas d'assurer la validité du modèle CN pour les fortes concentrations. Une perspective d'amélioration du modèle analytique pourrait consister à décrire de manière plus réaliste la distribution des distances entre les diffuseurs.

REFERENCES

- Dorval, V., Imperiale, A., Darmon, M., Demaldent, E., Henault, J-M. (2022). FEM-based simulation tools for ultrasonic concrete inspection. *e-Journal of Nondestructive Testing. International Symposium on Non-Destructive Testing in Civil Engineering (NDT-CE 2022)*, 27(9). <https://doi.org/10.58286/27228>
- Komatitsch, D., Tromp, J (1999). Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*, 139(3), 806-822. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.1999.00967.x>
- Chekroun, M., Marrec, L., Lombard, B., Piraux, J. (2012). Time-domain numerical simulations of multiple scattering to extract elastic effective wavenumbers. *Waves in Random and Complex Media*, 22(3), 398-422. <https://doi.org/10.1080/17455030.2012.704432>
- Ramaniraka, M., Rakotonarivo, S., Payan, C., Garnier, V. (2019). Effect of the Interfacial Transition Zone on ultrasonic wave attenuation and velocity in concrete. *Cement and Concrete Research*, 124, 105809. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2019.105809>
- Foldy, L L. (1945). The Multiple Scattering of Waves. I. General Theory of Isotropic Scattering by Randomly Distributed Scatterers. *Physical Review*, 67(3-4), 107-119. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.67.107>
- Waterman, P. C., Truell, R. (1961). Multiple Scattering of Waves. *Journal of Mathematical Physics*, 2(4), 512-537. <https://doi.org/10.1063/1.1703737>

Fikioris, J. G., Waterman, P. C. (1964). Multiple Scattering of Waves. II. "Hole Corrections" in the Scalar Case. *Journal of Mathematical Physics*, 5(10), 1413–1420. <https://doi.org/10.1063/1.1704077>

Linton, C. M., Martin, P. A. (2005). Multiple scattering by random configurations of circular cylinders: Second-order corrections for the effective wavenumber. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(6), 3413–3423. <https://doi.org/10.1121/1.1904270>

Conoir, J-M., Norris, A.N. (2010). Effective wavenumbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers. *Wave Motion*, 47(3), 183–197. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2009.09.004>

Rohfritsch, A. (2021). Diffusion multiple en milieux désordonnés : influence des propriétés macroscopiques et microscopiques sur les ondes cohérentes. *Thèse Sorbonne université*.

Chang, H-C, Wang L-C. (2010). A Simple Proof of Thue's Theorem on Circle Packing. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1009.4322>

Varadan, V-K, Varadan, V-V. (1980). Acoustic Electromagnetic and Elastic Waves Scattering-Focused on the T-Matrix Approach, Pergamon Press, New-York.

Chekroun, M. (2007). Caractérisation mécanique des premiers centimètres du béton avec des ondes de surface. *Thèse Ecole Centrale de Nantes*.

Toullélan, G., Raillon, R., Chatillon, S., Dorval, V., Darmon, M., Lonné, S., (2016). Results of the 2015 UT modeling benchmark obtained with models implemented in CIVA. *AIP Conference Proceedings*, 1706. <https://doi.org/10.1063/1.4940642>

Raillon, R., Bey, S., Dubois, A., Mahaut, S., Darmon, M. (2010). Results of the 2009 ut modeling benchmark obtained with civa: responses of notches, side-drilled holes and flat-bottom holes of various sizes. *AIP Conference Proceedings*, 1211. <https://doi.org/10.1063/1.3362396>

Dorval, V., Chatillon, S., Lu, B., Darmon, M., Mahaut, S. (2012). A general Kirchhoff approximation for echo simulation in ultrasonic NDT. *AIP Conference Proceedings*, 1430. <https://doi.org/10.1063/1.4716230>

Darmon, M., Ferrand, A., Dorval, V., Chatillon, S., Lonné, S., (2015). Recent modelling advances for ultrasonic TOFD inspections, *AIP Conference Proceedings*, 1650. <https://doi.org/10.1063/1.4914799>

Imperiale, A., Chatillon, S., Darmon, M., Leymarie, N., Demaldent, E., (2018). UT simulation using a fully automated 3D hybrid model: Application to planar backwall breaking defects inspection. *AIP Conference Proceedings*, 1949. <https://doi.org/10.1063/1.5031546>

Darmon, M., Toullélan, G., Dorval, V. (2022). An experimental and theoretical comparison of 3D models for ultrasonic non-destructive testing of cracks: Part I, Embedded cracks. *Applied Sciences*, 12(10), 5078. <https://doi.org/10.3390/app12105078>

Fradkin, L.J., Darmon, M., Chatillon, S., Calmon, P. (2016). A semi-numerical model for near-critical angle scattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(1), 141–150. <https://dx.doi.org/10.1121/1.4939494>

Zernov, V., Fradkin, L., Gaudesen, A., Darmon, M., Calmon, P. (2013). Wedge diffraction of a critically incident Gaussian beam. *Wave Motion*, 50(4), 708–722. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.01.004>

Fradkin, L J., Djakou, A K., Prior, C., Darmon, M., Chatillon, S., Calmon, P. (2020). The Alternative Kirchhoff Approximation in Elastodynamics with Applications in Ultrasonic Nondestructive Testing. *The ANZIAM Journal*, 62(4), 406–422. <https://doi.org/10.1017/S1446181120000036>

Yu, T., Chaix, J-F., Audibert, L., Komatitsch, D., Garnier, V., Hénault, J-M. (2019). Simulations of ultrasonic wave propagation in concrete based on a two-dimensional numerical model validated analytically and experimentally. *Ultrasonics*, 92, 21–34. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2018.07.018>