
Comportement des poutres à ouvertures d'âmes munies de raidisseurs

Taher Mohammed^{1,2}, Sébastien Durif^{1,2}, Abdelhamid Bouchaïr^{1,2}, Eric Fournely^{1,2}

1 Université Blaise Pascal, Institut Pascal, BP 10448, F-63000 Clermont-Ferrand mail : taherjasimmohammed@yahoo.fr

2 CNRS, UMR 6602, Institut Pascal, F-63171 Aubière, France

taherjasimmohammed@yahoo.fr, sebastien.durif@univ-bpclermont.fr, abdelhamid.bouchair@univ-bpclermont.fr, Eric.FOURNELY@univ-bpclermont.fr

RÉSUMÉ : Les poutres à ouvertures d'âmes sont aujourd'hui largement utilisées dans le domaine de la construction métallique et mixte. Cependant, la présence de larges ouvertures dans l'âme d'une poutre génère des comportements mécaniques spécifiques en comparaison avec les poutres à âmes pleines. Une des solutions couramment utilisée par l'industrie consiste à renforcer les ouvertures par le biais de différents raidisseurs verticaux ou horizontaux. Ces raidisseurs peuvent avoir plusieurs objectifs : prévenir le flambement du montant intermédiaire, renforcer la section des membrures d'ouverture vis-à-vis de la flexion Vierendeel, renforcer le panneau d'âme au voilement par cisaillement etc. Par conséquent, diverses raisons peuvent conduire à installer des raidisseurs autour d'une ouverture. Dans le cadre de la présente étude, différentes configurations géométriques de raidisseurs sont utilisées autour d'une ouverture isolée en vue d'évaluer leur influence sur le comportement global de l'ouverture. La version ENV des Eurocodes, fournit une annexe qui donne quelques règles relatives aux raidisseurs ainsi que des règles de dimensionnement. Cependant ces règles sont assez restrictives et conservatrices. L'objectif de ce présent travail est d'étudier le comportement mécanique d'un tronçon de poutre munie d'une ouverture rectangulaire avec différentes formes de raidisseurs par le biais de modélisations aux éléments finis. Le modèle éléments finis est développé sous Cast3M en tenant compte des non linéarités matérielles et géométriques avec des éléments volumiques.

MOTS-CLÉS : poutres cellulaires, études numériques, flexion Vierendeel, voilement local, modèle analytique, raidisseur.

ABSTRACT: The beams with web openings are now widely used in the field of steel and composite structures. However, the presence of large openings in the web of a beam generates specific mechanical behavior compared with full web beams. One of the solutions currently used by the industry is to strengthen the openings through different vertical or horizontal stiffeners. These stiffeners may have several objectives: prevent the local buckling, strengthen the chord section with respect to the opening of Vierendeel bending, strengthen the web panel shear buckling etc. Accordingly, various reasons may lead to install stiffeners around an opening. In this study, different geometric configurations of stiffeners have studied in order to assess their influence on the whole behavior of the opening. The version of the ENV Eurocodes provides an appendix gives some design rules for stiffened openings. On other hand, these rules are quite restrictive and conservative. The aim of the present work is to study the mechanical behavior of a beam section with a rectangular opening with different forms of stiffeners. The finite element model (volumic) is developed with Cast3M taking into account both nonlinearities material and geometrical.

KEY WORDS: cellular beams, numerical studies, Vierendeel bending, local buckling, analytical model, stiffeners.

1. Introduction

À ce jour, les études expérimentales sur les poutres ajourées ont permis d'identifier six principaux modes de ruine [ENV 95+KER 84]. Ces modes sont étroitement associés à la géométrie de la poutre globale, à l'élancement de l'âme, aux dimensions de l'ouverture, au type de chargement, aux conditions aux limites et à la position des ouvertures. Il est possible de distinguer les modes de ruine locaux au niveau des ouvertures des modes de ruines globaux [RFC 05]. Les modes de ruine locaux mettent en jeu les sections locales autour de l'ouverture. Trois modes locaux propres aux poutres munies d'ouvertures ont pu être identifiés : la flexion Vierendeel, le flambement du montant intermédiaire et la rupture de la soudure entre ouvertures [CHU, 01]. La flexion Vierendeel correspond à la formation d'un mécanisme de rotules plastiques aux 4 coins de l'ouverture induit par le transfert du cisaillement autour de l'ouverture. Le flambement du montant intermédiaire est généré par le cisaillement horizontal ou par la compression directe liée à un chargement ponctuel. La rupture de la soudure du montant intermédiaire (poutre alvéolaire formée à partir d'un profilé laminé à chaud) est associée au cisaillement horizontal du montant. Les modes de ruine globaux des poutres sont la flexion globale, dans le cas où l'ouverture critique se situe en zone de flexion pure.

Le présent travail s'intéresse à l'étude de la flexion locale des membrures d'une ouverture avec ou sans raidisseurs horizontaux. En effet, il existe peu de recherches sur le comportement des ouvertures munies de raidisseurs [SIV 06 + ANU 14 + SID 15 + SEV 99]. Aujourd'hui les prescriptions en terme de dimensionnement se basent sur les règles décrites dans l'annexe N de la précédente version ENV des eurocodes [ENV1993-1-1, Annexe N + RFC 05]. Ces règles donnent des prescriptions de longueur minimale de raidisseurs et fournissent quelques règles de calcul. Cependant, ces règles peuvent s'avérer peu satisfaisantes dès lors que l'on vient à utiliser des profilés différents de ceux traditionnellement utilisés en charpente métallique. De plus, aucune distinction n'est faite sur le fait d'utiliser un raidisseur ou deux raidisseurs de part et d'autre de l'âme.

Le travail présenté ci-après étudie donc différentes configurations d'ouvertures rectangulaires et différentes configurations de raidisseurs horizontaux afin d'évaluer la pertinence des règles existante en vue de fournir des règles permettant de compléter les prescriptions actuelles. La comparaison notamment avec le calcul d'une résistance plastique permet d'estimer le degré de participation d'un raidisseur en fonction de sa longueur et du fait qu'il soit simple ou double sur une même membrure.

Afin d'étudier en détail le comportement d'une ouverture avec ou sans raidisseur vis-à-vis de la flexion Vierendeel, il a été choisi d'étudier un modèle simplifié d'ouverture seule. Ce modèle offre l'avantage d'avoir une distribution d'effort interne similaire à celle au sein d'une poutre alvéolaire et d'être suffisamment réduit pour permettre des modélisations en éléments volumique avec une densité de maillage optimale. La Figure 1 présente le modèle d'ouverture seule étudié.

2. Modèles analytiques existants

Les normes actuelles permettent de dimensionner une poutre en tenant compte de la flexion locale des membrures d'une ouverture, la flexion Vierendeel [CHU, 01 + RFC 05 + ENV 95]. Cette approche consiste à considérer les membrures de l'ouverture comme des poutres soumises à un effort tranchant, un effort normal (induit par la flexion globale) et un moment fléchissant provoqué par le transfert du cisaillement autour de l'ouverture. La présence des raidisseurs horizontaux est prise en compte dans le calcul des propriétés sectorielles des membrures de l'ouverture, sections en té avec une paroi horizontale supplémentaire correspondant au raidisseur.

2.1. Sollicitations autour d'une ouverture

La méthode généralement utilisée pour définir le comportement mécanique d'une poutre munie d'une ou plusieurs ouvertures s'appuie sur la similitude avec une poutre échelle [DAR 03]. Ainsi, les efforts internes globaux de la poutre (V_G et M_G) se répartissent dans les membrures supérieure et inférieure de l'ouverture. De plus, afin de résoudre le problème hyperstatique d'une poutre échelle (poutre Vierendeel), l'hypothèse communément admise consiste à considérer une rotule à mi-travée de chaque membrure d'ouverture permettant de déduire de manière aisée la distribution des efforts internes dans chaque membrure [MAN 06]. La Figure 1 illustre la distribution des efforts internes globaux dans une section d'ouverture (a) et leurs efforts internes locaux équivalents (b).

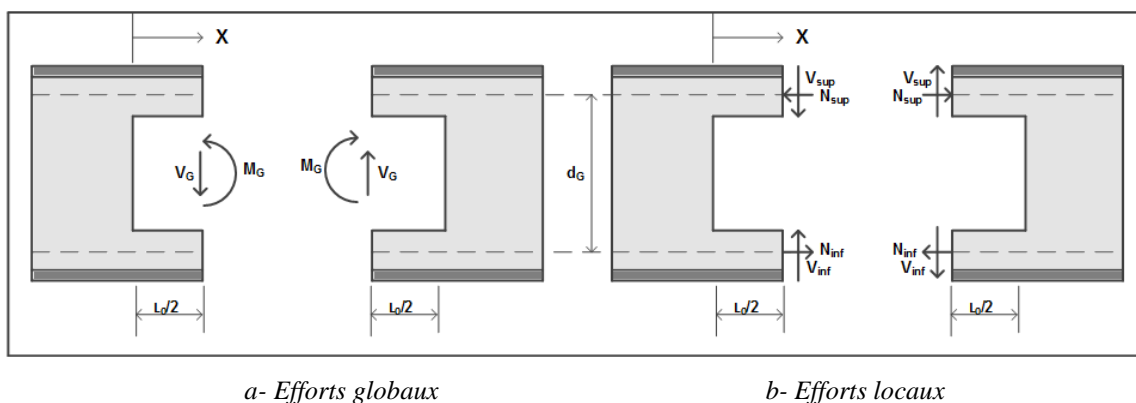


Figure 1 Efforts globaux et leurs efforts locaux équivalents dans une ouverture.

Dans le cas d'une ouverture centrée le cisaillement dans les membrures V_{inf} et V_{sup} peut se définir par l'équation (1) en considérant que l'effort tranchant se répartit proportionnellement aux aires des sections de membrures. La flexion Vierendeel locale (M_{Vier}) qui équilibre les efforts induits autour de l'ouverture peut s'exprimer par l'équation (2) [MAN 06].

$$V_{sup} = \frac{V_G}{2} \quad (1)$$

$$M_{Vier.} = \frac{V_{Vier.} * L_0}{2} \quad (2)$$

Les efforts locaux axiaux N_{sup} et N_{inf} induits par la flexion globale (MG) de la poutre peuvent être calculés par l'expression (3).

$$N_{sup} = \frac{M_G}{d_G} = -N_{inf} \quad (3)$$

Où

- M_G est le moment global au droit de l'ouverture.
- V_G est l'effort tranchant global au droit de l'ouverture.
- d_G est la distance entre les centres de gravité des tés à mi-longueur de l'ouverture d'âme.
- N_{sup} est l'effort normal dans la membrure supérieure au droit de l'ouverture.
- V_{sup} est l'effort tranchant dans la membrure supérieure au droit de l'ouverture.
- $M_{Vier.}$ est le moment de flexion locale, appelé moment de flexion Vierendeel.

2.2. Résistance des membrures d'une ouverture

Notre travail vise à évaluer le degré de participation d'un raidisseur d'une part sur la stabilité locale des parois comprimées de l'ouverture et d'autre part sur la résistance plastique des sections plastifiées.

La résistance plastique d'une membrure raidie se déduit directement du calcul du moment plastique d'une section en té munie d'une paroi horizontale supplémentaire, correspondant au raidisseur, comme illustré à la Figure 2.

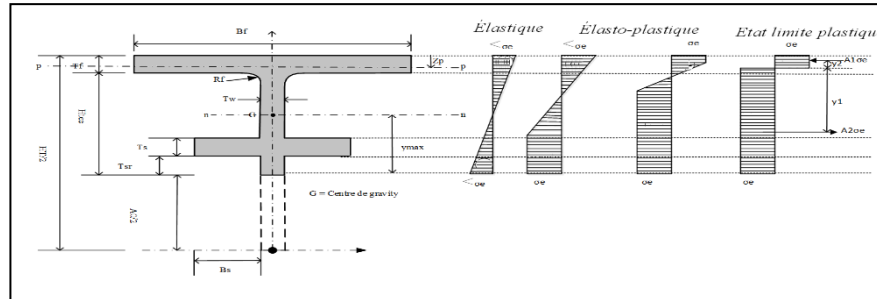


Figure 2 Plastification progressive d'une section non symétrique (n-n axe neutre de flexion élastique sous l'action de M_{el} ; p-p : axe neutre de flexion plastique sous l'action de M_{pl}).

De plus, étant donné que les membrures d'une ouverture sont soumises à de la flexion composée, il est nécessaire dans le calcul de la résistance de section de considérer une interaction entre moment et effort axial. Les règles actuelles proposent d'utiliser, comme pour les sections en té seules, une interaction quadratique.

Cependant, afin de pouvoir appliquer un calcul plastique, il est nécessaire que les parois constitutives de la section respectent certaines limites d'élancement. Il existe différentes valeurs de ces limites, suivant que l'on suive les règles actuelles de l'Eurocode 3 [NF-EN 1993-1-1] ou celles de l'annexe N de la précédente version des Eurocodes, qui propose des critères de classification de section propre aux ouvertures rectangulaires. Il est proposé de considérer l'apport du raidisseur en terme de résistance plastique seulement si celui respecte une longueur d'ancrage égale à $20 * tr$ (tr : épaisseur du raidisseur). La longueur d'ancrage d'un raidisseur est écrite l_v dans la Figure 3. Si le raidisseur ne respecte pas cette longueur d'ancrage, il ne peut pas être considéré dans la résistance plastique mais il peut être pris en compte dans le calcul de classe de section. Cela revient alors à traiter la paroi d'âme de la section en té, non plus comme une paroi en console mais comme une paroi intérieure [réf NF EN 1993-1-1 et ENV 1993-1-1, annexe N].

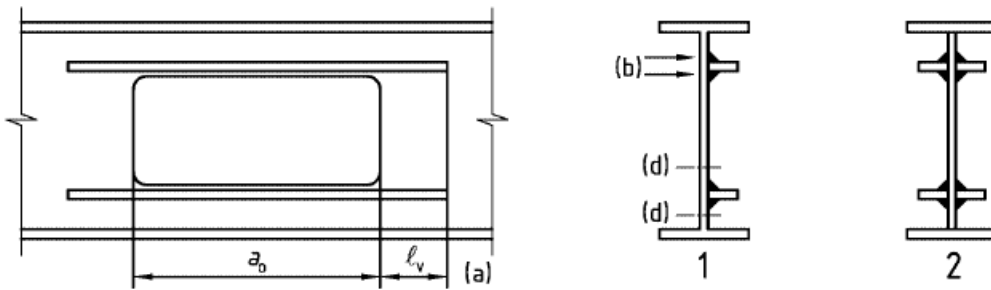


Figure 3 Illustration de la longueur d'ancrage l_v des raidisseurs horizontaux [ENV-1993-1-1, Annexe N]

Ces règles forfaitaires font l'objet de la présente étude. En effet, les règles actuelles ne considèrent pas l'effet de l'excentrement induit par la présence d'un raidisseur sur une seule face. De plus, le maintien au voilement local d'un seul raidisseur n'est pas le même que celui d'un double, ce qui n'est pas considéré non plus dans les prescriptions des règles de dimensionnement actuelles [ENV 95].

3. Modèle éléments finis

Un modèle éléments finis a été développé sur le logiciel Cast3m pour analyser le comportement mécanique de poutres munies d'ouvertures uniformément réparties ou isolée dans l'âme. Des éléments (CU20 et CUB8), volumiques à (20 et 8) nœuds à 3 degrés de liberté par nœud (UX, UY et UZ) ou coques (COQ4, COQ8 et TET4), ont été utilisés pour modéliser les différents modèles d'ouvertures seules. La figure 4 présente un exemple de maillage d'ouverture seule. Les conditions d'appui simple et d'articulation sont appliquées au niveau de la fibre moyenne aux extrémités de la poutre sur deux lignes perpendiculaires [RFC 05, EN3 93].

Les modélisations en éléments cubiques ont fait l'objet de plusieurs comparaisons afin de valider l'utilisation de ce type d'éléments pour permettre de représenter correctement les phénomènes d'instabilité locales. L'intérêt de ces éléments volumiques est de rendre compte de manière précise de l'épaisseur des éléments et des congés de raccordement qui s'avère être déterminante dans la stabilité locale réelle des parois constitutives d'une section en té d'une membrure d'ouverture.

Le calcul non linéaire est effectué en considérant des grands déplacements et un comportement de matériaux Elasto-plastique avec écrouissage linéaire. Le calcul comprend deux étapes. La première correspond à un calcul de modes propres d'instabilité de la structure. Le premier mode est pris comme imperfection initiale de la structure avec une amplitude forfaitaire qui respecte les critères définis dans la norme NF EN1993-1-5 Annexe C [EN3-1-5]. Ensuite le calcul non-linéaire en grands déplacements est effectué. Les contraintes sont prises aux points d'intégration de Gauss. Le modèle a été évalué sur la base de plusieurs études comparatives avec la théorie des poutres sur des cas simples de poutres droites en flexion simple afin d'en déduire une densité de maillage optimale. La Figure 4 présente un exemple de maillage d'ouverture avec raidisseur.

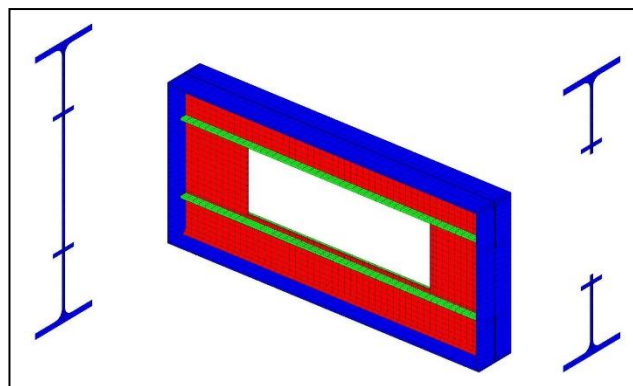


Figure 4 Exemple du maillage Modèle éléments finis.

4. Etude paramétrique comparative

L'étude présentée ci-après compare les résultats analytiques et numériques pour plusieurs configurations d'ouvertures, en variant les paramètres géométriques d'ouverture et les paramètres de raidisseurs.

4.1. Ouvertures raidies rectangulaires

La Figure 5 présente les différentes configurations d'ouvertures et de raidisseurs étudiées (Modèles A, B, C et D de la Figure 5). Seuls les résultats de l'ouverture A et B sont détaillés dans l'article. Le modèle d'ouverture A correspond à une ouverture non raidie. L'ouverture B correspond à une ouverture munie soit : d'un raidisseur horizontal sur une seule face (B1) soit sur 2 faces (B2), pour les deux membrures (B3) ou seulement sur la membrure supérieure (B4).

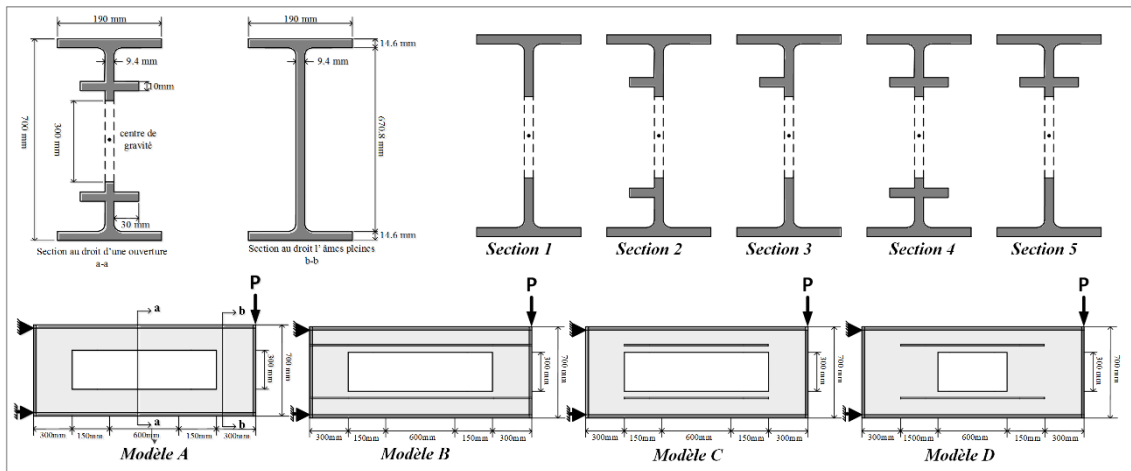


Figure 5 Illustration des modèles à ouvertures raidies rectangulaires

Il peut être constaté sur la Figure 6 que la présence des raidisseurs permet de renforcer l'ouverture de manière significative. Le modèle d'ouverture A atteint une charge ultime inférieure à la résistance plastique du fait de la présence d'une instabilité locale aux coins de l'ouverture dans les zones les plus comprimées. La présence des raidisseurs (configurations B) renforcent l'ouverture vis-à-vis de cette instabilité locale et de la résistance plastique de la section mais ne permettent pas d'exclure une perte de résistance liée à la présence d'une autre instabilité locale. En effet, il peut être observé que l'instabilité locale initialement observée au coin de l'ouverture se retrouve dans la partie d'âme pleine intermédiaire. Le tableau 1 présente les résultats d'efforts obtenus à partir d'une analyse modale de charge critique (F_{cr}), d'une analyse élasto-plastique en grands déplacements (F_{ultime}) et du modèle plastique analytique ($F_{pl,théo}$). L'effort plastique analytique est calculé en considérant une section en té avec une paroi horizontale supplémentaire (raidisseur), sauf pour la configuration A qui ne considère aucun raidisseur.

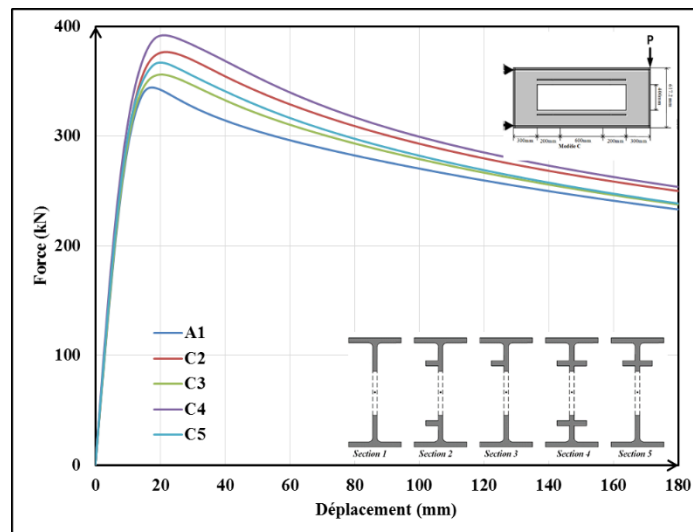


Figure 6 Force-Déplacement configurations A et B

Diagrammes pour les configurations A et B

Cas	Fcr (kN)			Fultime (kN)	Fpl,Théo (kN)
	Mode1	Mode2	Mode3		
A1	452.4	544.3	556.1	344.1	368.8
B2	868.5	1180.4	1472.3	464.4	471.7
B3	478.1	565.8	869.4	394.8	471.7
B4	1107.0	1588.2	1837.0	554.1	574.1
B5	504.9	590.0	908.7	447.7	574.1

Tableau 1 Résultats des charges ultimes pour les configurations A et B.

Les autres configurations ont permis de mettre en évidence l'utilité d'une longueur d'ancrage importante. C'est la raison pour laquelle, une seconde étude comparative a été menée afin d'identifier les différentes conséquences sur la résistance mécanique de l'ouverture de la présence de raidisseurs avec différentes longueurs d'ancrage.

Le tableau 2 présente les mêmes résultats que précédemment pour la configuration de raidisseur C (voir Figure 6), qui correspond à une longueur d'ancrage nulle. Il peut être constaté que les raidisseurs apportent en résistance mais ne permettent pas d'atteindre la pleine résistance plastique de la section en té renforcée (471kN ou 574kN). Cette observation permet d'illustrer l'intérêt d'analyser l'importance de la longueur d'ancrage qui est étudiée plus en détail dans le paragraphe suivant.

Cas	Fcr (kN)			Fultime (kN)	Fpl,Théo (kN)
	Mode1	Mode2	Mode3		
A1	452.4	544.3	556.1	344.1	368.8
C2	551.9	682.0	964.1	376.6	471.7
C3	462.1	552.9	660.3	356.0	471.7
C4	557.7	718.5	1023.6	391.8	574.1
C5	482.3	571.1	654.0	366.9	574.1

Tableau 2 Résultats des charges ultimes pour les configurations A et C.

4.2. Ouvertures avec différentes longueurs de raidisseurs

La Figure 7 présente les différentes configurations étudiées qui font varier la longueur d'ancrage de raidisseur : $L_r = 0$; $10tr$; $20tr$; $30tr$ et $40tr$ (avec tr : épaisseur du raidisseur), pour différentes conditions de maintien hors plan de l'ouverture. La différence entre la configuration A6 et 7 réside dans le fait que les raidisseurs horizontaux de la configuration A7 sont connectés aux raidisseurs verticaux.

Il est question d'évaluer l'apport en résistance plastique d'un raidisseur suivant sa longueur d'ancrage, en excluant toute forme d'instabilité. Par conséquent, le présent papier présente les études comparatives pour des ouvertures sans maintien supplémentaire, puis avec des maintiens hors plan au niveau du contour ou des angles de l'ouverture.

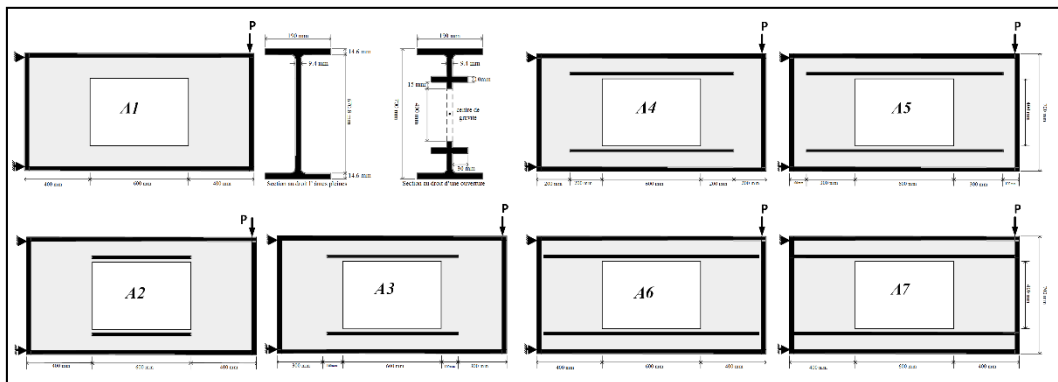


Figure 7 Illustration des modèles à ouvertures avec différentes longueurs des raidies.

4.2.1. Modèles sans blocage hors plan de l'âme

La figure 8 présente les résultats des différentes configurations A1 à A7. Il peut être observé sur la figure 8 que la longueur d'ancrage permet de graduellement augmenter la capacité résistante de l'ouverture. De plus, à partir d'une longueur d'ancrage $L_v = 20tr$, il apparait que la résistance maximale est atteinte. L'allure de toutes les courbes montre une phase descendante après avoir atteint la charge ultime, ce qui est caractéristique de

l'apparition d'une forme d'instabilité. D'ailleurs il peut être observé qu'au-delà de $20t_r$, augmenter la longueur d'ancrage permet d'augmenter le palier plastique durant lequel l'ouverture conserve une résistance proche de sa capacité ultime, ce qui traduit le fait que plus le renforcement est long et plus il tend à maintenir la paroi de l'âme vis-à-vis des phénomènes d'instabilité locale. Par conséquent, cette configuration d'ouverture voit sa résistance limitée par les problèmes d'instabilités. C'est la raison pour laquelle il a été choisi d'étudier par la suite, la même ouverture avec cependant des conditions de maintien des déplacements hors plan de l'âme afin d'évacuer les différents problèmes d'instabilité. Dans un second temps (voir partie 4.2.3), il a été choisi de tester une configuration d'ouverture plus sensible aux instabilités afin d'évaluer la pertinence du critère de longueur d'ancrage minimale prescrite de 20^*t_r [ENV 95].

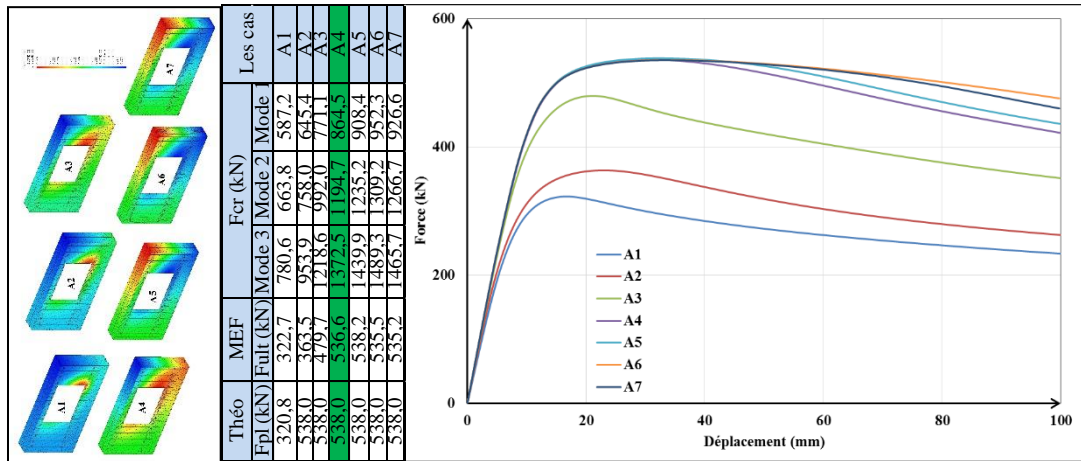


Figure 8 Comparaison des résultats MEF pour les ouvertures avec différentes longueurs des raidies et résumé des résultats (Sans bloqués toute l'âme).

4.2.2. Modèles avec blocage hors plan du contour de l'ouverture

Cette configuration vise à étudier la même ouverture que précédemment avec un maintien hors plan de tout le contour de l'ouverture, évacuant ainsi les problèmes d'instabilité locale au niveau du bord libre de l'ouverture.

La figure 9 présente les différents résultats issus des modélisations. Les résultats obtenus permettent de confirmer que ce qui limite la résistance des ouvertures partiellement raidies (avec une longueur d'ancrage inférieure à $20t_r$) provient non pas des phénomènes d'instabilités mais bien du fait que la longueur d'ancrage est insuffisante pour permettre de profiter pleinement de la capacité plastique de la section en té renforcée. Cependant, il peut donc être constaté que la résistance de raidisseurs avec des longueurs d'ancrage insuffisantes peuvent apporter une résistance supplémentaire non négligeable (exemple de la configuration A3 qui permet de passer d'une capacité initiale de 325kN à 500kN).

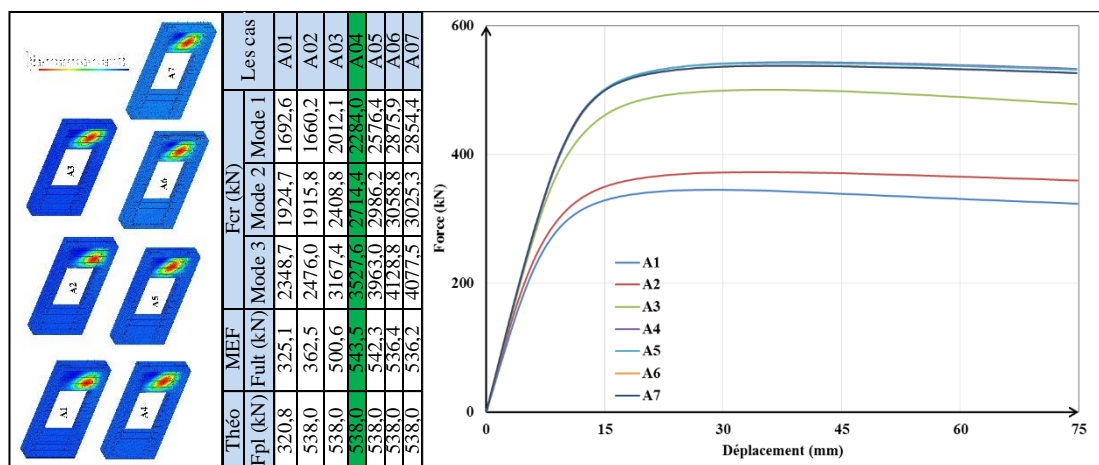


Figure 9 Comparaison des résultats MEF pour les ouvertures avec différentes longueurs des raidies et résumé des résultats bloqués ($u_z = 0.0$) toute la membrure d'ouverture avec Iso-déplacements hors plan bloqués toute la membrure d'ouverture (Premier mode d'instabilité).

4.2.3. Modèle sans blocage hors plan avec une épaisseur d'âme de 8mm

Cette dernière configuration vise à étudier une ouverture pour laquelle la résistance ultime est largement limitée par les instabilités locales. Pour ce faire, il a été choisi de réduire légèrement l'épaisseur de l'âme ce qui augmente de fait l'élançement des parois de l'ouverture.

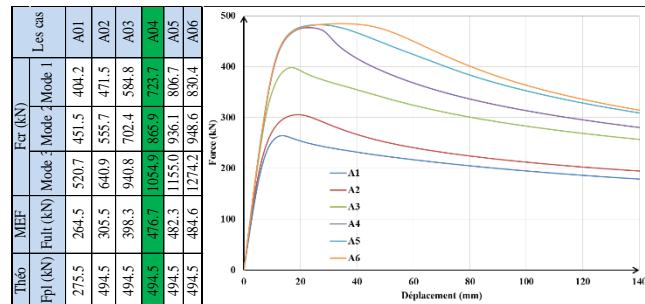


Figure 10 Comparaison des résultats MEF pour les ouvertures avec différentes longueurs des raidies et résumé des résultats (l'épaisseur de l'âme 8mm).

Il peut être observé sur la Figure 10 les évolutions des différentes courbes force-déplacement pour les différentes configurations d'ouverture étudiées. Ces courbes permettent d'illustrer que dans le cas d'ouverture légèrement plus élancées (épaisseur d'âme de 8mm au lieu de 9.4mm), la longueur d'ancrage forfaitaire de 20tr peut s'avérer être insuffisante pour assurer la pleine résistance plastique de l'ouverture.

5. Conclusion

A partir des résultats obtenus grâce au modèle éléments finis (éléments volumiques CU20), il a pu être observé que l'effort ultime d'une ouverture raidie est très influencé par la présence de raidisseurs horizontaux. Ceux-ci jouent un non seulement un rôle de maintien aux instabilités, mais confèrent une augmentation de section résistante pouvant être non-négligeable.

Les prescriptions actuelles fixent une longueur forfaitaire d'ancrage de ces raidisseurs, en dessous de laquelle ceux-ci ne peuvent pas être pris en compte dans la résistance de l'ouverture. Les résultats numériques nous ont permis cependant d'observer que l'apport en résistance plastique de raidisseurs partiels n'est pas négligeable et qu'il serait intéressant de proposer une approche analytique permettant de mieux prendre en compte la présence de ce type de raidisseurs. Enfin, dans le cas d'ouverture réalisée au sein d'une poutre type P.R.S. (profilé reconstruit soudé), dont l'élançement des parois varie d'une poutre à l'autre, la valeur forfaitaire de 20tr peut s'avérer ne pas être adaptée voire non sécuritaire. D'autres analyses paramétriques devront donc être menées afin de développer une méthode permettant de mieux caractériser la résistance d'ouvertures munies de raidisseurs.

6. Bibliographie

- [ENV 95] ENV 1993-1-1, Eurocode 3 - Design of Steel Structures - Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings, 1995 (Annex N).
- [KER 84] Kerdal D., Nethercot D.A., Failure modes of castellated beams, J. Constr. Steel Res., 1984, vol.4, pp.295-315
- [LAW 05] Lawson RM, Lim J, Hicks SJ, Simms WI, Design of composite asymmetric cellular beams and beams with large web openings, J. Constr. Steel Res., 2005, vol. 6, pp.614-629.
- [CHU 01] Chung K.F., Liu TCH, Ko ACH, Investigation on Vierendeel mechanism in steel beams with circular web openings, J. Constr. Steel Res., 2001, vol. 57, pp.467-490.
- [CHU, 01] Chung K.F., Lawson R.M., Simplified design of composite beams with large web openings to Eurocode 4, Journal of Constructional Steel Research, 2001, vol. 2, pp.135-164.
- [RFC 05] RFCS, Research Fund for Coal and Steel, Large Web Openings for Service Integration in Composite Floors: Design Guide for Composite Beams With Large Web Openings, 2005.
- [TIM 97] Timoshenko S.P., J. Monroe G., Theory of Elastic Stability 2E, MCGRAW-HILL, 1961.
- [CCM 97] CCM97: Règles de conception et de calcul des structures en acier, Centre national de recherche appliquée en génie parasismique, 1997.
- [AFN 99] Eurocode 3: Calcul des structures en acier et Document d'Application Nationale, AFNOR, 1999.
- [EN3 93] European wide flange beams HE A, HE B and HE M 100- 1000 in accordance with Euronorm 53-62.
- [DAR 03] Darwin D., Design of Steel and Composite Beams with Web Openings, Design Guide 2, AISC, 3ème édition, 65 pages, 2003.
- [SIV 06] Sivakumaran K.S., Ming Yin Ng, Steven R. Fox, Flexural strength of cold-formed steel joist with reinforced web openings, Journal of Civil Engineering, 2006, vol. 33, pp. 1195-1208.

[ANU 14] B. Anupriya, K. Jagadeesan, Shear strength of castellated beam with and without stiffeners using fea fea (ansys 14), IJRET, vol. 6, aug-sep 2014.

[SID 15] Siddheshwari. A. Patil, Popat. D. Kumbhar , Study of castellated beam using stiffeners, IJRET, Vol. 4, Nov-2015.

[SEV 99] Sevak D., Stability of castellated beam webs, McGill University Montreal, Canada thesis, 1999.

[EN3-1-5] EN 1993-1-5, Eurocode 3 - Design of steel structures - part1-5 : "Plated structural elements", 2004.