

---

# De la défaillance localisée à la ruine d'une structure en contexte probabiliste

SECK El Hadji Boubacar<sup>1</sup>, ORTOLA Sophie<sup>2</sup>, DAVENNE Luc<sup>3</sup>

<sup>1</sup> elhadjiboubacar.seck@u-paris10.fr, Université Paris Ouest Nanterre La Défense, LEME, EA4416

<sup>2</sup> sophie.ortola@u-paris10.fr, Université Paris Ouest Nanterre La Défense, LEME, EA4416

<sup>3</sup> luc.davenne@u-paris10.fr, Université Paris Ouest Nanterre La Défense, LEME, EA4416

---

*RÉSUMÉ.* La robustesse des ouvrages est une préoccupation de plus en plus importante du monde du Génie Civil. En effet, l'actualité montre que régulièrement la survenue de sollicitations accidentelles, criminelles ou non, engendre une destruction ou fragilisation notoire de parties de bâtiments ou d'ouvrages. Parfois, ces ruines localisées (défaillance initiale) peuvent être suivies de dégradations disproportionnées (défaillance globale) se généralisant en chaîne à tout ou partie du bâtiment ou de l'ouvrage, voire des constructions voisines. C'est dans ce contexte de fiabilité des constructions que nous proposons une méthode d'analyse de la robustesse d'une structure par la recherche d'un arbre de défaillance illustrant les cheminements potentiels distincts d'événements initiaux localisés jusqu'à la ruine globale de la structure. La méthode est illustrée sur un exemple simple mais suffisamment général pour illustrer les concepts utilisés. L'analyse de l'arbre des possibilités de défaillance et des indices de robustesse permettent de mettre en évidence les fragilités potentielles de la structure vis-à-vis d'accidents ou d'actes de malveillance.

*ABSTRACT.* The structural robustness is an increasing interest in the construction. Indeed, the news shows regularly the occurrence of accidental stresses, criminal or not, that can cause the destruction or the weakness of parts of buildings or structures. Sometimes, these localized initial failure can be followed by disproportionate degradations (global failure) spreading to all or part of the building or structure, not to say to neighboring buildings. In the framework of reliability of structures, we propose an analysis of the structural robustness by looking for a fault tree illustrating distinct potential paths from initial localized events to global destruction of the construction. The method is exposed on a simple but sufficiently general example to illustrate the methodology. The analysis of the fault tree and of the robustness indices allows to highlight potential brittleness of the structure with respect to accidents or malicious acts.

*MOTS-CLÉS :* robustesse, arbre de défaillance, défaillance locale, défaillance globale, fiabilité, Monte-Carlo.

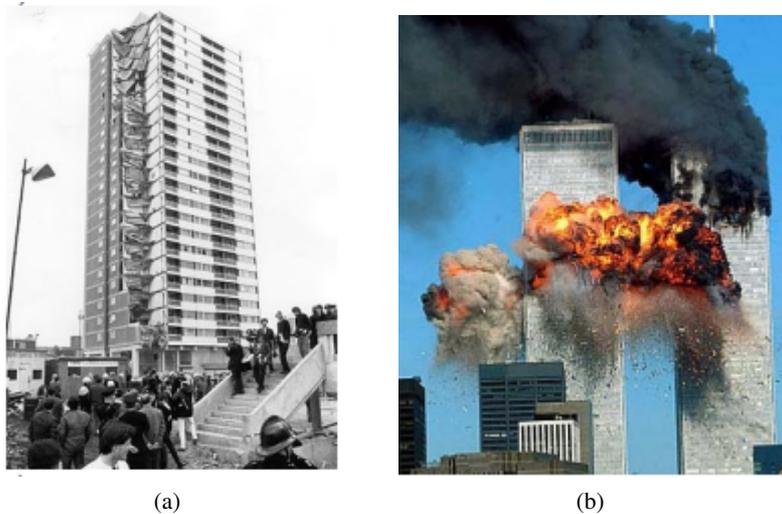
*KEYWORDS:* robustness, fault tree, initial failure, global failure, fiability, Monte-Carlo.

---

## 1. Introduction

La plupart des constructions ont été dimensionnées et réalisées selon des études de conception avec calculs déterministes, prenant en compte les sollicitations réglementaires et leurs combinaisons selon les normes en vigueur. La variabilité est prise en compte sous forme de coefficients partiels de sécurité dans un contexte semi probabiliste. Or l'actualité montre régulièrement la survenue de sollicitations accidentelles, criminelles ou non (feux, explosions, chocs, attentats, séismes, ...) engendrant une destruction ou fragilisation notoire de parties de bâtiments (logements, bureaux, industries, établissements recevant du public, ...) ou d'ouvrages (ponts, tunnels, échangeurs, réseaux, ...). Parfois, des ruines localisées (défaillance initiale) peuvent être suivies de dégradations disproportionnées (défaillance globale) se généralisant en chaîne à tout ou partie du bâtiment ou de l'ouvrage, voire aux constructions voisines.

Citons par exemple, l'effondrement partiel et progressif de la tour Ronan Point de Canning Town à Londres (Angleterre, 16.05.1968) (Figure 1 a), la destruction des tours jumelles du World Trade Centre de New York (États-Unis, 11.09.2001) (Figure 1 b), l'effondrement d'une partie de voute d'une passerelle du terminal 2E de l'aéroport Roissy Charles-de-Gaulle (France, 23.05.2004), la ruine du pont autoroutier de l'interstate-35 Ouest du Mississippi (États-Unis, 01.08.2007), ou encore la défaillance en chaîne survenue lors de l'accident nucléaire de Fukushima (Japon, 11.03.2011). Tout récemment encore, l'attaque terroriste de l'aéroport de Bruxelles entraîna l'effondrement du toit (Belgique, 22.03.2016).



**Figure 1.** Effondrement (a) de la Tour Ronan Point ; (b) des Tours jumelles du World Trade Centre [GOU 13].

Outre la question de la préservation des personnes, ces défaillances accidentelles, aux conséquences disproportionnées vis-à-vis de la cause initiale, soulèvent les questions de gestion des risques (accidents, attentats) et d'enjeux économiques.

Ce travail a pour objectif de proposer un outil de simulation de la robustesse d'une structure lorsque des incertitudes de sollicitations (événement accidentel) et / ou dimensionnelle (défaut de conception ou de réalisation) interfèrent avec les conceptions et dimensionnements réglementaires. Cet article présente la méthodologie retenue pour étudier la robustesse d'une structure hyperstatique par la recherche d'un arbre de défaillance illustrant les cheminements potentiels de la ruine globale de la structure suite à un événement initial localisé. Le principe de calcul du cheminement des ruptures locales jusqu'à la ruine du système global comprend trois étapes :

- déterminer les probabilités de défaillance locales,
- rechercher les probabilités conditionnelles (de proche en proche) d'un nouvel événement, connaissant l'historique des précédents,
- calculer la probabilité de défaillance globale prévisible selon chaque scénario par l'intersection de tous les événements y conduisant.

La mise en oeuvre de cette méthode fait intervenir les notions suivantes :

- la robustesse structurale, aptitude d’une structure à résister à des événements localisés (incendies, explosions ou conséquences d’une erreur humaine) sans présenter de dégâts disproportionnés (généralisés).
- la défaillance, altération ou cessation d’un bien à accomplir sa fonction requise
- le mode de défaillance, effet par lequel une défaillance se manifeste.
- le mécanisme de défaillance regroupe les processus mécaniques, chimiques ou autres conduisant ou ayant conduit à une défaillance globale du système étudié ; dans notre étude, nous nous intéressons aux comportements mécaniques.

## 2. Présentation du cas d’étude

Dans les paragraphes suivants, nous illustrons la méthode dans le cas de structures unidimensionnelles hyperstatiques constituées de poutres fléchies. La redondance induit que la rupture d’une ou plusieurs sections n’aura pas toujours comme conséquence la ruine de l’ensemble du système. En effet, les parties structurales non endommagées restantes peuvent être en mesure de supporter la charge externe sollicitante grâce à une redistribution des efforts internes.

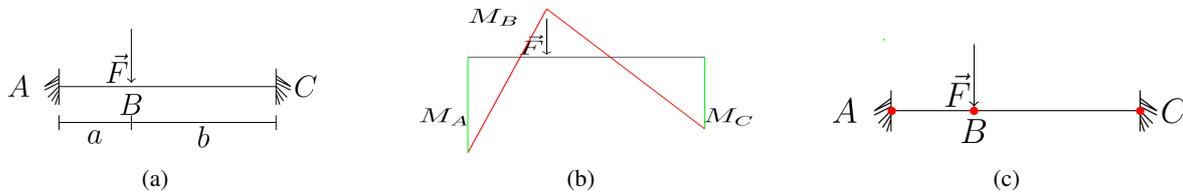
Nous noterons  $M_{r_i}$  le moment résistant d’une section  $i$  et  $M_{s_i}$  l’intensité du moment fléchissant sollicitant cette même section  $i$ . Pour simplifier la présentation, nous considérons des sections élastiques parfaitement fragiles, avec formation d’une rotule (moment plastique nul) dès l’atteinte d’une valeur limite, indépendamment du signe du moment sollicitant.

Nous détaillons la méthode sur un exemple simple mais suffisamment général pour permettre de présenter les concepts utilisés. Il s’agit d’une poutre bi-encastree de longueur  $L$  soumise à une force ponctuelle (Figure 2 a), hyperstatique de degré 2, de telle sorte que la défaillance globale de ce système résultera de la formation de trois rotules. La géométrie de la poutre, le module d’élasticité du matériau et la position de la charge sont considérés déterministes, de sorte que la variabilité des moments sollicitant  $M_{s_i}$  ne dépend que de celle du chargement  $F$ . Les moments résistants et la charge  $F$  sont considérés comme des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes. Ainsi, le vecteur des variables aléatoires  $X$  aura pour composantes  $X = (M_{r_A}, M_{r_B}, M_{r_C}, F)$ .

La première étape consiste à étudier l’équilibre statique initial. Ceci nous permet d’identifier les sections critiques où peuvent s’initier de potentielles ruptures (mode de défaillance, Figure 2 c) et le diagramme du moment fléchissant (Figure 2 b) montre que trois sections peuvent être défaillantes. Ainsi les moments sollicitants  $M_{s_i}$  des sections critiques A, B et C sont :

$$M_{sA} = -\frac{Fab^2}{L^2} = k_A F ; \quad M_{sB} = \frac{2Fa^2b^2}{L^3} = k_B F ; \quad M_{sC} = -\frac{Fa^2b}{L^2} = k_C F \quad [1]$$

où  $k_i$  représente le coefficient de proportionnalité vis-à-vis de la variable aléatoire  $F$ .



**Figure 2.** a) Poutre bi-encastree étudiée ; b) Diagramme du moment sollicitant ; c) Positions prévisibles des rotules fragiles.

Le Tableau 1 résume les moyennes et écart-types des variables aléatoires choisies pour les données numériques suivantes :  $L = 2m$ ,  $a = \frac{1}{3}L$  et  $b = \frac{2}{3}L$ .

## 3. Calcul de la probabilité de défaillance locale

Pour analyser la robustesse structurale, nous utilisons des concepts de fiabilité appliqués aux systèmes mécaniques par l’introduction d’un critère de défaillance. Selon [THO 86, LEM 05, MAD 85], ce critère traduit l’équilibre entre la ressource et le besoin par une fonction d’état limite  $G(X)$  qui sépare le domaine de sûreté du domaine de défaillance (eq. [2]). La relation  $G(X) = 0$  constitue la surface d’état limite où  $X$  représente le vecteur des variables aléatoires choisies pour décrire les incertitudes potentielles du système structurel étudié ; par convention

**Tableau 1.** Données des variables aléatoires.

Variabiles aléatoires	moyenne : $m_{X_i}$	écart-type : $\sigma_{X_i}$
$M_{rA}$ [Nm]	1600	500
$M_{rB}$ [Nm]	1600	500
$M_{rC}$ [Nm]	1600	500
$F$ [N]	2800	1000

$G(X) \leq 0$  représente le domaine de défaillance et  $G(X) > 0$  le domaine de sûreté. Pour chaque section droite  $i$  ( $i \in \{A, B, C\}$ ), il y a deux variables aléatoires et l'écriture du critère de défaillance dans l'espace initial dit "des variables physiques" est :

$$G_i = M_{r_i} - |M_{s_i}| = M_{r_i} - |k_i| F \leq 0 \quad [2]$$

Le calcul de la probabilité de défaillance s'effectue grâce à l'estimation de l'indice de fiabilité  $\beta$  de Hasofer et de Lind que l'on peut obtenir par la méthode d'approximation FORM (First Order Reliability Method) [HAS 74, THO 86, LEM 05, GOU 13, AOU 08]. Le calcul de  $\beta$  comprend deux étapes :

– effectuer un changement de variables de l'espace physique vers un espace normé par une transformation (transformation isoprobabiliste pour des variables aléatoires Gaussiennes).

– rechercher dans l'espace normé l'indice de fiabilité  $\beta$  défini comme la distance à l'origine de la frontière de la surface d'état limite  $G$ .

Pour des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes  $X_i$ , de réalisation  $x_i$ , de moyenne  $m_{X_i}$  et d'écart-type  $\sigma_{X_i}$ , la transformation de l'espace physique vers l'espace normé est linéaire et s'écrit :

$$x_i \rightarrow u_i = \frac{x_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad [3]$$

où les variables  $u_i$  de l'espace normé suivent une loi Gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire  $N(0, 1)$ .

L'expression de la surface d'état limite  $G$  sera notée  $H$  dans l'espace normé et s'écrira, pour chaque évènement  $e_i$  représentant une défaillance locale de la section  $i$  :

$$e_i : \sigma_{r_i} u_{r_i} - |k_i| \sigma_s u_s + m_{r_i} - |k_i| m_s = 0 \quad [4]$$

où la variable  $u_{r_i}$  correspond au moment résistant  $M_{r_i}$  de moyenne  $m_{r_i}$  et d'écart type  $\sigma_{r_i}$  et la variable  $u_s$  correspond à la force  $F$  de moyenne  $m_s$  et d'écart type  $\sigma_s$ . Les coefficients  $k_i$  sont ceux écrits dans l'équation [1]. Dans l'espace normé, l'expression [4] représente un hyperplan (une droite dans le cas de deux variables aléatoires) dont la distance à l'origine  $\beta_i$  est donnée par la relation suivante :

$$\beta_i = \frac{m_{r_i} - |k_i| m_s}{\sqrt{\sigma_{r_i}^2 + (k_i \sigma_s)^2}} \quad [5]$$

En introduisant les cosinus directeurs  $\alpha_{r_i}$  pour la résistance et  $\alpha_{s_i}$  pour la sollicitation, [HAS 74] a montré que dans l'espace normé, l'expression de la surface d'état limite normalisée  $H$  est :

$$e_i : \alpha_{r_i} u_{r_i} - \alpha_{s_i} u_s + \beta_i = 0 \quad [6]$$

où  $\alpha_{r_i}$  et  $\alpha_{s_i}$  s'expriment par les relations suivantes :

$$\alpha_{r_i} = \frac{\sigma_{r_i}}{\sqrt{\sigma_{r_i}^2 + (k_i \sigma_s)^2}} \quad ; \quad \alpha_{s_i} = \frac{|k_i| \sigma_s}{\sqrt{\sigma_{r_i}^2 + (k_i \sigma_s)^2}} \quad [7]$$

L'indice de fiabilité  $\beta_i$  et  $\phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite permettent de calculer la probabilité de défaillance locale  $p_i$  de l'évènement  $e_i$  (rupture fragile de la section droite  $i$ ) :

$$p_i = p(e_i) = \phi(-\beta_i) = 0.5 * (1 + \operatorname{erf}(-\frac{\beta_i}{\sqrt{2}})) \quad [8]$$

où  $erf()$  représente la fonction erreur.

Pour le cas d'étude (Figure 2), les expressions des surfaces d'état limite normalisées sont :

$$e_A : 0.747 u_{r_A} - 0.664 u_s + 0.531 = 0 \quad [9]$$

$$e_B : 0.860 u_{r_B} - 0.509 u_s + 1.325 = 0 \quad [10]$$

$$e_C : 0.913 u_{r_C} - 0.406 u_s + 1.787 = 0 \quad [11]$$

et les probabilités correspondantes sont regroupées dans le Tableau 2.

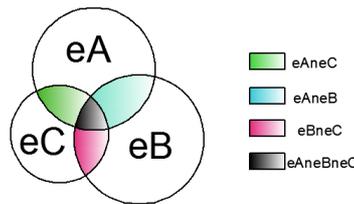
**Tableau 2.** Probabilité de défaillance des sections A, B et C

Sections	$p_i$
A	0.297
B	0.092
C	0.036

Une fois les probabilités de défaillances locales déterminées, il faut calculer les probabilités conditionnelles entre événements successifs ou concomitants afin de pouvoir construire l'arbre de défaillance. La démarche est présentée dans les paragraphes suivants.

#### 4. Calcul de la probabilité d'événements concomitants

La méthode présentée au paragraphe précédent ne permet de calculer que la probabilité d'un événement individuel, sans tenir compte des interactions ou corrélations avec un événement voisin. Ainsi, par exemple, la probabilité de l'événement  $e_A$  inclut le cas où la rotule se forme uniquement en A, mais également les cas où des rotules se forment en B et/ou C en même temps qu'en A. Ces cas de ruptures concomitantes ont des probabilités traduites par les intersections d'événements  $e_i \cap e_j$  et  $e_i \cap e_j \cap e_k$  (Figure 3). Pour une élaboration correcte de l'arbre de défaillance (en ne comptant pas deux fois les mêmes probabilités dans deux branches différentes), il est nécessaire de séparer les événements seuls des événements concomitants.



**Figure 3.** Illustration des probabilités de défaillance des sections A, B et C.

Ce paragraphe présente donc la méthode de calcul des probabilités des intersections pour en déduire les probabilités de rupture d'une section seule, notée  $e'_i$  et celles de l'intersection seule de deux sections ( $e_i \cap e_j$ ), notée  $e'_{ij}$  :

$$p'_i = p(e'_i) = p(e_i) - \sum p(e_i \cap e_j) + p(e_i \cap e_j \cap e_k) \quad [12]$$

$$p'_{ij} = p(e'_{ij}) = p(e_i \cap e_j) - p(e_i \cap e_j \cap e_k) \quad [13]$$

avec  $i, j, k \in \{A, B, C\}$ ,  $i \neq j \neq k$

#### 4.1. Intersection de deux événements

La probabilité de défaillance de l'intersection de deux événements se détermine par l'intégration suivante [AOU 08, LEM 05, THO 86] :

$$\phi_2(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{ij}) = \phi(-\beta_i)\phi(-\beta_j) + \int_0^{\rho_{ij}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-z^2}} \exp\left(-\frac{\beta_i^2 + \beta_j^2 - 2\beta_i\beta_j}{2(1-z^2)}\right) dz \quad [14]$$

Où  $\rho_{ij}$  est le coefficient de corrélation obtenu par le produit scalaire des vecteurs des cosinus directeurs [ 7].

Dans le cas de la poutre bi-encastée, les valeurs des intersections possibles (Figure 3) ont été calculées par une intégration numérique de Simpson et sont résumées dans le Tableau 3.

**Tableau 3.** Probabilité de défaillance des intersections deux à deux

intersection des Sections	$p_{ij}$
$A \cap B$	0.048
$A \cap C$	0.019
$B \cap C$	0.0068

#### 4.2. Intersection de plus de deux événements

La probabilité d'une intersection de plus de deux événements est calculée grâce à l'approximation de Hohenbichler [LEM 05, THO 86, HOH 83] qui est une procédure itérative. A chaque itération, le nombre d'événements est diminué de un et la procédure se poursuit jusqu'au calcul de l'intersection de deux événements. Chaque étape repose sur le calcul d'un indice de fiabilité équivalent  $\beta^{eq}$  et des cosinus directeurs équivalents  $\alpha^{eq}$ .

Pour la poutre bi-encastée, il reste à déterminer  $e_A \cap e_B \cap e_C$ . Le calcul de la probabilité de l'intersection  $e_A \cap e_B \cap e_C$  correspond au calcul de la probabilité des deux événements (intégrale [14])  $e_{AB} = e_A \cap e_B$  et  $e_{AC} = e_A \cap e_C$  si on choisit l'événement  $e_A$  comme initiation du processus itératif. Il faut déterminer par linéarisation les hyperplans équivalents aux intersections  $e_{AB}$  et  $e_{AC}$ , c'est à dire calculer les distances  $\beta_{AB}^{eq}$  et  $\beta_{AC}^{eq}$  ainsi que les cosinus directeurs équivalents  $\alpha_{AB}^{eq}$  et  $\alpha_{AC}^{eq}$ .

Le Tableau 3 permet de calculer l'indice de fiabilité équivalent :

$$\beta_{AB}^{eq} = -\phi^{-1}(p_{AB}) \quad [15]$$

où  $\phi^{-1}$  est l'inverse la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (voir la formule analytique sur [LEM 05] ). Le cosinus directeur équivalent pour chaque variable aléatoire  $u_{ri}$  et  $u_s$  est déterminé par l'approximation suivante :

$$\alpha_{AB}^{eq} = \frac{\tilde{\beta}_{AB}^{eq} - \beta_{AB}^{eq}}{\epsilon} \quad [16]$$

où  $\epsilon$  représente une perturbation (nous avons choisi  $\epsilon = 0.001$ ) de la variable aléatoire considérée et  $\tilde{\beta}$  la conséquence sur les indices de fiabilités  $\beta$  initiaux.

Ainsi pour la première variable aléatoire  $u_{rA}$  et pour les événements  $e_A$  et  $e_B$  [9, 10], il vient :

$$\tilde{\beta}_A = \beta_A - \alpha_{rA} \epsilon \quad [17]$$

$$\tilde{\beta}_B = \beta_B - 0 \quad [18]$$

car  $e_B$  ne dépend pas de  $\alpha_{rA}$ . L'accroissement de  $\tilde{\beta}_{AB}^{eq}$  (non linéaire) dû à l'accroissement de  $\alpha_{rA}$  vaut :

$$\tilde{\beta}_{AB}^{eq} = -\phi^{-1}(-\tilde{\beta}_A, -\tilde{\beta}_B, \rho_{AB}) \quad [19]$$

La même procédure est utilisée pour les variables aléatoires  $u_{rB}$  et  $u_s$  afin de déterminer l'équation approchée de l'hyperplan  $e_{AB}$  (voir l'équation 20). On procède de manière analogue pour les événements  $e_A$  et  $e_C$  afin d'obtenir l'équation de l'hyperplan  $e_{AC}$  :

$$e_{AB} : 0.297 u_{rA} + 0.681 u_{rB} - 0.668 u_s + 1.738 = 0 \quad [20]$$

$$e_{AC} : 0.251 u_{rA} + 0.781 u_{rC} - 0.570 u_s + 2.160 = 0 \quad [21]$$

Finalement la probabilité de l'intersection des trois événements est :

$$p_{ABC} = \phi(\beta_A) \phi_2(-\beta_{AB}, -\beta_{AC}, \rho_{[AB] \cap [AC]}) \quad [22]$$

L'ensemble des calculs précédents permet d'évaluer (d'après l'équation [12]) les probabilités des événements seuls  $e'_i$  et  $(e_i \cap e_j)'$  et les résultats sont donnés dans le tableau 4.

L'ensemble de ces calculs de probabilités définissent les branches du premier niveau de l'arbre de défaillance. À l'exception de la branche  $A \cap B \cap C$ , il n'y a pas de rupture complète de la structure. Il faut continuer en étudiant un nouvel état de la structure permettant de calculer les probabilités conditionnelles, c'est-à-dire les probabilités de nouvelles ruptures sachant qu'une ou deux rotules ont déjà rompu ( $M_p = 0$ ).

**Tableau 4.** Probabilité de défaillance des sections A, B et C seules,  $A \cap B$ ,  $A \cap C$  et  $B \cap C$  seules

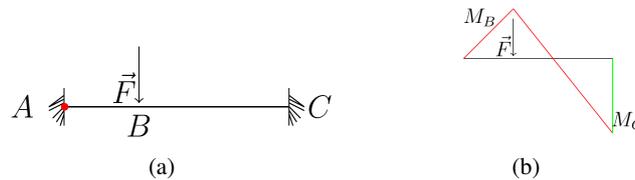
Sections	$p'_i$	Sections	$p'_{ij}$
A	0.233	$A \cap B$	0.045
B	0.04	$A \cap C$	0.015
C	0.015	$B \cap C$	0.003

### 5. Calcul des probabilités conditionnelles

Le Tableau 4 montre que la section A présente la plus grande probabilité de défaillance. Si nous supposons que la première rotule se forme en A (Figure 4 a), afin de poursuivre l'étude des potentiels scénarii de défaillance en chaîne, nous devons déterminer le nouveau diagramme tenant compte de la redistribution des sollicitations (Figure 4 b). En particulier, les moments sollicitant des sections B et C ont pour nouvelles intensités :

$$M_{sB|A} = \frac{Fab^2(3L-b)}{2L^3} = k_{B|A} F \quad ; \quad M_{sC|A} = -\frac{Fab(2a+b)}{2L^2} = k_{C|A} F \quad [23]$$

où la notation  $i|j$  indique la défaillance de la section  $i$  sachant la défaillance de la section  $j$ .



**Figure 4.** a) Nouvel état de la structure après rupture fragile en A ; b) Diagramme du moment sachant l'existence d'une première rotule en A ( $M_p = 0$ ).

En appliquant la démarche présentée précédemment (§ 3 et 4), les expressions des surfaces d'état limite normalisées  $H$  dans l'espace normé sont :

$$e_{B|A} : 0.693 u_{rB|A} - 0.72 u_s + 0.203 = 0 \quad [24]$$

$$e_{C|A} : 0.747 u_{rC|A} - 0.663 u_s + 0.533 = 0 \quad [25]$$

Les probabilités de défaillance des sections B seule et C seule sachant la défaillance de A sont obtenues en retranchant la probabilité de défaillance de l'intersection  $B \cap C$  sachant A [Tableau 5]. Ces probabilités se calculent suivant la démarche expliquée précédemment.

**Tableau 5.** Probabilité de défaillance des sections B seule et C seule sachant la défaillance de A.

Sections	sachant la défaillance	$p'_{i A}$	Sections	sachant la défaillance	$p'_{ij A}$
B	A	0.226	$B \cap C$	A	0.193
C	A	0.104			

Si la deuxième défaillance se situe au niveau de la section B (Figure 5), nous calculons le moment sollicitant en C :

$$M_{sC|AB} = -\frac{Fab(2a+b)}{2L^2} = k_{C|AB} F \quad [26]$$

où  $k_{C|AB}$  représente le coefficient de proportionnalité vis-à-vis de la variable aléatoire  $F$ .

L'expression de la surface d'état limite normalisée  $H$  est :

$$e_{C|AB} : 0.242 u_{rC|AB} - 0.970 u_s - 1.94 = 0 \quad [27]$$

La probabilité de défaillance de la section droite C sachant les défaillances successives des sections A puis B est :

$$p'_{C|AB} = \phi(-\beta_{C|AB}) = 0.974 \quad [28]$$

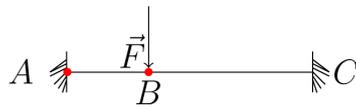


Figure 5. État du système avec deux rotules fragiles ( $M_p = 0$ )

Les autres scénarii (rupture initiale en B ou en C ou en deux sections en même temps) sont calculés de manière analogue. Afin de construire l'arbre complet des défaillances possibles, il faut étudier tous les autres scénarii possibles que ce soit sur l'initiation des ruptures (B ou C) et leurs combinaisons (ordre, événement(s) seul ou lié(s)).

## 6. Arbre de défaillance et validation

L'arbre de défaillance (Figure 6) résulte de toutes les combinaisons conduisant à des scénarii exclusifs. La probabilité de rupture globale (3 rotules) selon un scénario est calculée en multipliant toutes les probabilités rencontrées le long du chemin conduisant à celui-ci, car chaque branche est indépendante (exclusive). Plusieurs expressions ont été proposées pour calculer l'indice de robustesse [GOU 13] et nous retenons l'indice ci-dessous variant entre 0 (structure peu robuste) et 1 (structure très robuste) :

$$I_r = 1 - \frac{p_{globale}}{p_{locale}} \quad [29]$$

où  $p_{locale}$  représente la probabilité de l'événement initial sur le chemin considéré de l'arbre et  $p_{globale}$  la probabilité de rupture de la structure complète sur ce même chemin.

La méthode de construction de cet arbre (très rapide) a été validée par une simulation de Monte-Carlo (1 million de tirages). Les différences entre les probabilités calculées selon ces deux techniques est de l'ordre de 1% maximum sauf pour deux valeurs ( $p'_{BC}$  et  $p'_{ABC}$ ) où la différence atteint 20%. Ceci est probablement dû au fait que nous avons traité, dans notre méthode itérative, les événements à égalité (actifs ou non) lors des itérations de Hohenbichler. Nous travaillons actuellement sur l'amélioration de ce point. L'analyse de la fiabilité de la poutre AC lorsque la rupture fragile est initiée au niveau d'une (d'autres) section(s) permet de construire l'arbre de défaillance ci-dessous, résumant l'ensemble des scénarii possibles et leur probabilité d'occurrence respective :

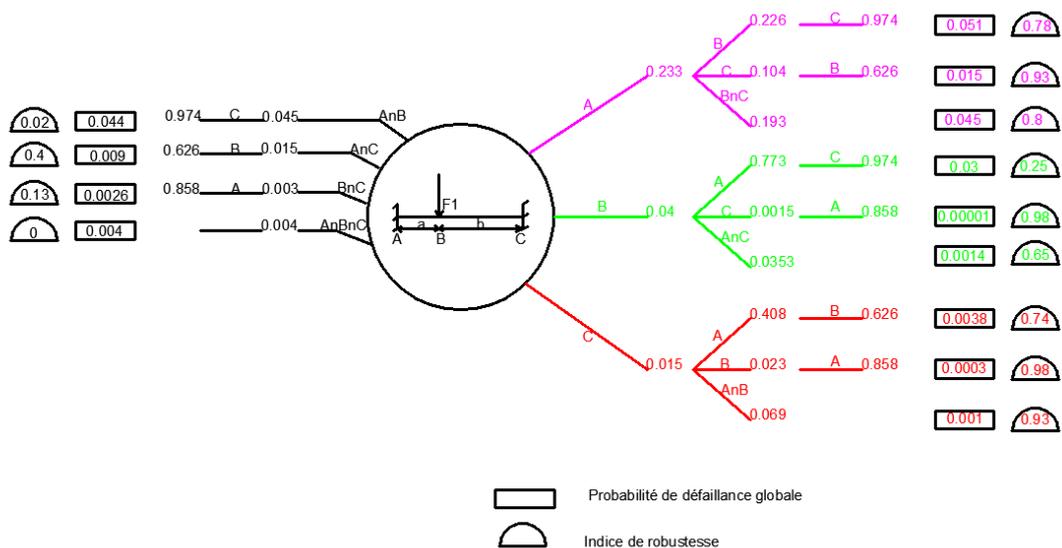


Figure 6. Arbre de défaillance.

L'analyse de l'arbre montre que, logiquement, le chemin le plus probable (probabilités les plus grandes à chaque étape) est celui correspondant au calcul déterministe  $A \rightarrow B \rightarrow C$  avec la formation successive des rotules fragiles suivant l'ordre des moments sollicitants de plus forte intensité (car les résistances des sections ont

la même distribution dans notre exemple). Toutefois, on remarque que ce n'est pas ce scénario qui produit l'indice de robustesse le plus grand. L'analyse des indices de robustesse permet d'ailleurs de montrer par exemple que :

– lorsque deux sections cassent simultanément initialement (probabilités faibles), l'indice de robustesse est très faible ; ceci est logique pour cet exemple très simpliste puisque deux sections cassées représentent 2/3 de la défaillance globale. On ne peut pas vraiment parler de défaillance initiale « locale ».

– le chemin  $B \rightarrow A \rightarrow C$  montre un indice assez faible (0.25) ; une intention malveillante ou un accident au niveau de la section B peut donc avoir des conséquences importantes sur l'ensemble du système.

Ainsi, la construction de l'arbre complet pourrait permettre d'analyser les priorités en termes de réhabilitation, protection et de renforcement d'une structure « sensible » vis-à-vis de la sécurité des personnes.

## 7. Conclusion et Perspectives

Dans cet article nous avons présenté une démarche probabiliste pour caractériser les cheminements possibles de la défaillance localisée à la ruine globale d'une structure hyperstatique. Nous présentons les résultats sous forme d'un arbre de défaillance comportant des branches exclusives, sans intersection entre branches issues d'un même nœud. Cela permet de calculer des indices caractérisant la robustesse de la structure selon chaque scénario, et d'identifier les zones vulnérables de la structure pouvant engendrer une défaillance généralisée. Nous avons illustré notre démarche sur un exemple de poutre bi-encastree avec sections fragiles en flexion. Cette structure simple a permis de mettre en place les concepts utilisés et de montrer que l'on peut mettre en évidence des résultats non intuitifs.

Beaucoup d'améliorations sont à apporter (par exemple, moment plastique non nul) pour rendre cette technique adaptée à l'étude de structures réelles : comportement non linéaire des sections et critères de rupture non symétriques, corrélations entre résistances de sections d'une même poutre, variabilité des paramètres géométriques, ... De plus, le nombre de branches et nœuds dans l'arbre augmentent très rapidement en fonction du nombre de défaillances locales étudiées, il faudra élaborer des techniques de tri et élimination pour limiter le nombre de scénarii envisagés et calculés.

## 8. Bibliographie

- [AOU 08] AOUES Y., Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance des structures, PhD thesis, Université Blaise Pascal, 2008.
- [GOU 13] GOUADJIO N. C. K., Étude de la vulnérabilité et de la robustesse des ouvrages, PhD thesis, Université Paris Est, 2013.
- [HAS 74] HASOFER A. M., LIND N. C., « Exact and invariant second moment code format », *Eng. Mechanics Div.*, vol. 100, n° 1, p. 111–121, 1974.
- [HOH 83] HOHENBICHLER M., RACKWITZ R., « First Order concepts in system reliability », *structural safety*, vol. 3, n° 1, p. 207–214, 1983.
- [LEM 05] LEMAIRE M., *Fiabilité des structures*, Lavoisier, Paris, 2005.
- [MAD 85] MADSEN H. O., « First Order vs. second order reliability analysis of series structures », *structural safety*, vol. 2, n° 1, p. 207–214, 1985.
- [THO 86] THOFT-CHRISTENSEN P., MUROTSU Y., *Application of structural systems reliability theory*, Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986.