
Contribution à la Modélisation du GSOM Lagrangien

Asma Khelifi ^{1, 2, 4, a)}, Habib Haj-Salem ², Jean-Patrick Lebacque ², Jennie Lioris ²,
Guillaume Costeseque ³, Lotfi Nabli ⁴

¹ Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, ENIT.

² Université Paris-Est, IFSTTAR, GRETTIA France.

³ Inria Sophia Antipolis, France.

⁴ Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, ENIM, LARATSI.

a) asma.khelifi@ifsttar.fr, asma.khelifi@enit.rnu.tn

RÉSUMÉ. Dans nos travaux, nous sommes motivés par la modélisation du réseau routier grâce aux modèles macroscopiques de flux de trafic d'ordre supérieur. Plus précisément, la famille générique des modèles GSOM. Nous étudions alors le modèle d'intersection basé sur la discrétisation lagrangienne du modèle GSOM. En effet, les modèles macroscopiques d'ordre supérieur ont été étudiés sur une section homogène, mais ils attirent encore peu d'attention pour leur mise en œuvre sur des jonctions parce qu'elles sont très difficiles à traiter. Cependant, les jonctions sont la principale source de difficulté pour les flux de trafic sur un réseau. Notre objectif est de développer un modèle d'intersection compatible avec la description microscopique et macroscopique, et de satisfaire les contraintes classiques (le principe d'invariance par exemple).

ABSTRACT. In this paper, we are motivated by road network traffic flow modeling, thanks to higher order macroscopic traffic flow models. More precisely, we focus on the Generic Second Order Models (GSOM) family which embeds a large variety of traffic models. Lagrangian GSOM models have been already well studied on homogeneous section but they attracted little attention for their implementation on intersections. However, junctions are the main source of difficulty for traffic streams on a network. In this paper, we develop a numerical scheme of a junction model which is compatible with micro and macro description, and satisfy the constraints of the invariance principle.

MOTS-CLÉS : modélisation du trafic routier, famille GSOM, GSOM Lagrangien, schéma numérique, modèle de jonction.

KEY WORDS: traffic flow modeling, GSOM family, Lagrangian GSOM, numerical scheme, junction model

1. Introduction

Depuis la seconde moitié du 20^{ème} siècle, le phénomène de la congestion autoroutière est devenu prééminent en raison de la crise énergétique mondiale (augmentation des prix pétroliers) et de la catastrophe économique mondiale. Parmi les différents leviers, la modélisation du trafic est au centre des développements actuels pour améliorer la circulation routière dans les villes modernes avec des tendances d'urbanisation. Les modèles de simulation du trafic sont des outils précieux et utiles pour plusieurs tâches d'ingénierie du trafic. Parmi les modèles macroscopiques, nous trouvons une nouvelle famille de modèles macroscopiques de second ordre (GSOM « Generic Second Order Model »). Les modèles GSOM ont pour principal avantage de modéliser l'apparition et l'évolution de phénomènes transitoires qui apparaissent dans la réalité lorsque le trafic subit des variations de son état. Mais, ils sont complexes et difficiles à utiliser : les solutions analytiques ne peuvent pas être calculées facilement même dans des cas très simples. Cette famille de modèles GSOM fera l'objet de ce papier. L'objectif primordial recherché est la résolution numérique en discrétisation Lagrangienne et la modélisation des trajectoires de paquets de véhicules ; ainsi que la modélisation d'intersection en coordonnées lagrangiennes. Dans le domaine de la simulation du trafic, la modélisation de l'intersection est un problème complexe et très mal résolu jusqu'à présent. Comme l'intersection est un lieu de croisement des trajectoires de différents véhicules, elle est aussi potentiellement génératrice de nombreux conflits et d'accidents. Le but d'un modèle de nœud est de relier les conditions aux limites en amont et en aval d'une section de convergent/divergent. L'analyse des conditions aux limites et de la modélisation de l'intersection sont au premier plan au niveau de ce travail. Cependant, pas toutes les combinaisons d'offre/demande et les modèles d'intersection produisent des modèles de nœuds consistants et cohérents. Un critère de sélection est dérivé : c'est le principe d'invariance. La modélisation des intersections nécessite la prise en compte du principe d'invariance afin d'assurer la stabilité du schéma numérique. Les modèles du nœud formulés en termes de liaison, nœuds, offre et demande qui satisfont le principe d'invariance peuvent être formulés pour le modèle GSOM. Parmi ces modèles il y a les modèles du nœud et l'état interne de [KHO 09], [KHO 08] et [LEB 13]. Ces modèles d'intersection sont compatibles avec la discrétisation

lagrangienne. Le principal problème résolu dans le papier de [KHO 08] est la modélisation des intersections en combinant l'approche offre/demande pour les liaisons et les nœuds, le modèle interne pour les nœuds et les conditions aux limites de nœuds.

Tout d'abord, nous menons un travail préparatoire à la construction de modèle GSOM Lagrangien en formulant le problème posé ; puis sa résolution par la méthode de résolution numérique basée sur le schéma de Godunov ; à travers une transformation de coordonnées Eulériennes en coordonnées Lagrangiennes. Ensuite, nous introduisons la méthodologie adoptée pour la nouvelle résolution numérique pour la modélisation d'intersection en coordonnées lagrangiennes, ainsi que quelques résultats de simulation obtenus.

2. Spécification du modèle GSOM

Une extension naturelle du modèle LWR ([LIG 55] ; [RIC 56]) est constituée par la famille GSOM des modèles mis en place par [LEB 07]. La famille GSOM inclut le modèle LWR et englobe de nombreux autres modèles macroscopiques ([AW 00]; [ZHA 02]; [COL 02]; [ZHA 09]; [LEB 07] ; [KHO 09] ; [TRE 15]). La dynamique de flux de circulation résulte de l'interaction de deux processus. Le premier est hydrodynamique de nature, et les rendements de caractéristiques comportementales de trafic qui peuvent être observés sur une base régulière, à savoir les ondes d'accélération (raréfaction) et de décélération (ondes de choc), la congestion, la diminution de la vitesse avec la densité, etc. Le deuxième processus résulte de l'impact des attributs spécifiques du conducteur (comportement, origine-destination, classe véhicule/conducteur) sur la fluidité du trafic. Ces deux processus sont intégrés dans une seule famille de modèles de flux de trafic macroscopique, à savoir la famille GSOM.

Le modèle GSOM est exprimé comme suit:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho v}{dx} = 0 \\ \frac{\partial \rho I}{\partial t} + \frac{\partial \rho I v}{\partial x} = -\rho f(I) \\ v = \mathfrak{I}(\rho, I) \end{cases} \quad [1]$$

Le comportement de flux de trafic selon l'équation [1] admet deux types d'ondes :

- les ondes cinématiques (ou 1-onde) qui affectent la densité et sont semblables aux ondes du modèle LWR. Le vecteur attribut du conducteur I est continue à travers une 1-onde.
- Les discontinuités de contact (ou 2-ondes) qui propagent des variations ou des discontinuités de I à la vitesse $v = \mathfrak{I}(\rho, I)$.

3. Résolution numérique du modèle GSOM

La résolution numérique du modèle GSOM que nous proposons se fait par discrétisation spatio-temporelle fondée sur le schéma de Godunov. L'idée de base du schéma numérique de Godunov est de relier les notions du schéma numérique et celles de la solution du problème de Riemann.

Un exemple du modèle GSOM est donné par le modèle ARZ ([AW 00]; [ZHA 02]), dans lequel la fonction \mathfrak{I} est définie par :

$$\mathfrak{I}(\rho, I) = V_e(\rho) + I \quad [2]$$

Avec $V_e(\rho)$ est le diagramme fondamental vitesse-densité.

Ce modèle exige des ajustements pour que la densité puisse rester dans les limites physiques. L'idée de base de la discrétisation lagrangienne du modèle GSOM est la suivante: premièrement nous réécrivons le modèle GSOM dans sa forme lagrangienne, deuxièmement nous intégrons les équations pour les attributs comportementaux et nous intégrons le résultat dans l'équation d'onde cinématique. Le résultat de cette procédure sera une seule loi de conservation pour l'inter-distance des véhicules.

Le modèle GSOM est équivalent au système de coordonnées lagrangiennes suivant :

$$\begin{cases} \partial_T r + \partial_N v = 0 & \text{Conservation des véhicules} \\ \partial_T I = 0 & \text{Conservation de l'attribut du conducteur I} \\ v = \mathcal{G}(r, I) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{S}(1/r, I) & \text{Conducteur dépendant du diagramme fondamental} \end{cases} \quad [3]$$

Le principe de la discrétisation lagrangienne est de considérer la fonction cumulée, que nous notons $N(x, t)$ et d'exprimer le modèle comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathfrak{S}(\rho, I) \\ \dot{I} = -S(I) \end{cases} \quad [4]$$

En considérant $x_n(t)$ la trajectoire du nième véhicule, c'est-à-dire $N(x, t) = n$, le système [3] discrétisé est donné alors par :

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) = \mathfrak{S}\left(\frac{1}{x_{n-1}(t) - x_n(t)}, I_n(t)\right) \\ \dot{I}_n(t) = -S(I_n(t)) \end{cases} \quad [5]$$

Le modèle [3] discrétisé dans le temps s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_n(t + \Delta t) = x_n(t) + \Delta t \mathfrak{S}\left(\frac{1}{x_{n-1}(t) - x_n(t)}, I_n(t)\right) \\ I_n(t + \Delta t) = \Psi(I_n(t), \Delta t) \end{cases} \quad \text{avec } \Delta t = dt \quad [6]$$

Avec $\Psi(I_0, \tau)$ est la solution à l'instant τ de $dt/d\tau = -S(I)$ et $I_{\tau=0} = I_0$.

Nous avons :

$$\dot{x}_n(t) = \mathfrak{S}\left(\frac{1}{x_{n-1}(t) - x_n(t)}, I_n(t)\right) \quad [7]$$

Par conséquent, pour le cas de traitement par paquet de véhicules (ΔN est le nombre de véhicule par paquet de véhicules), nous obtenons le modèle GSOM discrétisé suivant :

$$\begin{cases} x_n(t + \Delta t) = x_n(t) + \Delta t \cdot v_n(t) \\ v_n(t) = \mathfrak{S}\left(\frac{x_{n-1}(t) - x_n(t)}{\Delta N}, I_n(t)\right) \\ I_n(t + \Delta t) = I_n(t) + \Delta t \cdot S(I_n(t)) \end{cases} \quad [8]$$

4. Modélisation de l'intersection au niveau Lagrangien

On présente dans cette section le nouveau schéma numérique amélioré qu'on a adopté pour le modèle GSOM Lagrangien sur jonction, en se référant aux travaux de [LEB 13] et [COS 15], tout en ajoutant un modèle de jonction à état interne analysant la dynamique des véhicules à l'intérieur du nœud. Un exemple numérique de simulation est donné.

4.1. Conditions aux limites en aval

On considère le point de sortie S situé à la position x_s . Les données sur les conditions aux limites en aval à x_s sont données par l'offre discrétisée en aval σ' . On note que : $(n+1)$ est la dernière particule située sur le lien, et η est la proportion de la particule $(n+1)$ encore sur le lien à t.

L'interdistance associée à la particule $(n+1)$ est donnée par la formule suivante :

$$r_{n+1}^t = \frac{x_S - \chi_{n+1}^t}{\eta \Delta N} \quad [9]$$

La fraction η est instanciée lors du premier pas de temps t_n après la sortie de la particule (n) comme suit :

$$\eta = \frac{x_S - \chi_n^t}{r_n^t \Delta N} \quad [20]$$

Avec t_n est le temps d'entrée de l'arrière de la particule.

L'algorithme qu'on propose est composé comme suit :

- 1) Initialiser η
- 2) Calculer r_{n+1}^t
- 3) Il est nécessaire de distinguer 2 cas de figure :
 - a) Si $V(r_{n+1}^t, I_{n+1}^t) \leq \sigma^t r_{n+1}^t$ et $\chi_{n+1}^{t+1} = \chi_{n+1}^t + \Delta t V(r_{n+1}^t, I_{n+1}^t)$: dans ce cas, l'offre en aval est suffisante pour répondre à la demande sur le lien et l'interdistance est conservée.
 - b) Si $V(r_{n+1}^t, I_{n+1}^t) > \sigma^t r_{n+1}^t$: dans ce cas, la demande sur le lien ne peut pas être pleinement satisfaite puisque l'offre en aval limite le flux sortant. Ensuite, il faut résoudre $V(r_{n+1}^t, I_{n+1}^t) = \sigma^t r_{n+1}^t$ et choisir la plus petite valeur $r_{n+1}^t = r_z$ (phase congestionnée).
- 4) Puis, il faut mettre à jour l'indice et la position de la particule ($n+1$). Il faut aussi mettre à jour la fraction η si la particule n'a pas totalement quitté le lien.

4.2. Conditions aux limites en amont

On considère le point de sortie E situé à la position x_E . Les données sur les conditions aux limites en amont à x_E sont données par la demande prescrite discrétisée en amont δ^t au pas de temps t . (n) est la dernière particule entrée dans le lien. Notre objectif est de s'adapter aux conditions aux limites en amont, la méthodologie mise au point pour les conditions aux limites en aval décrite dans la section précédente, par l'introduction d'une proportion de la particule η qui est déjà entré le lien. Le problème auquel nous sommes confrontés est que, contrairement aux conditions aux limites en aval où nous connaissons la position exacte de la dernière particule qui a quitté le lien, nous ne savons pas précisément la position de la particule suivante qui entrera le lien. Si nous considérons que la dernière particule qui a entièrement entré le lien au temps t , marqué n , nous introduisons une fraction η^t de la particule ($n+1$) qui est déjà obtenu dans le lien à l'instant t . Nous notons que q^t est le débit effectif à l'entré en amont et à l'instant t pendant $(t\Delta t, (t+1)\Delta t)$.

L'algorithme que nous proposons est composé comme suit:

- 1) Initialisation de η : En supposant que la particule (n) entièrement entrée le lien au temps $t_n = (t + \varepsilon)\Delta t$, la proportion η^{t+1} à $(t+1)$ est donné par l'expression suivante :

$$\eta^{t+1} = \frac{q^t (1 - \varepsilon) \Delta t}{\Delta N} \quad [31]$$

Avec $\varepsilon \Delta t = t \Delta t - t_n$ et $t_n = (t - \varepsilon) \Delta t$ est la date exacte à laquelle l'arrière de la particule (n) entre dans le lien à x_E .

- 2) Calculer le débit efficace entrant des particules qui pénètrent le lien q^t et la demande locale en aval σ^t par les expressions suivantes :

$$q^t = \min(\sigma^t, \delta_z^t) \quad [42]$$

$$\sigma^t = \sum_{tronçon} (r_{n+1}^t, I_{n+1}^t) \quad [53]$$

Avec δ_z^t : la demande cumulative de (z)

- 3) Calculer l'interdistance de la particule ($n+1$) à t comme suit :

$$r_{n+1}^t = \frac{\chi_n^t - x_E}{\eta_{n+1}^t \Delta N} \quad [64]$$

Dans la jonction (z), il y aura alors $(1-\eta^t)\Delta N$ véhicules restant de la particule $(n+1)$.

4) Comparer $(1-\eta^t)\Delta N$ et $q^t\Delta t$, et distinguer 2 cas:

a) Si $q^t\Delta t < (1-\eta^t)\Delta N$, alors $(n+1)$ ne sort pas complètement du nœud et mettre à jour η_{n+1}^{t+1} :

$$\eta_{n+1}^{t+1} = \eta^t + \frac{q^t\Delta t}{(1-\eta^t)\Delta N} \quad [75]$$

b) Si $q^t\Delta t \geq (1-\eta^t)\Delta N$, alors $(n+1)$ sort complètement du nœud, avec l'instant de sortie est

$(t + \varepsilon)\Delta t$ et mettre à jour ε_{n+1}^{t+1} :

$$\varepsilon_{n+1}^{t+1} = \frac{(1-\eta^t)\Delta N}{q^t\Delta t} \quad [86]$$

Il faut ensuite calculer la trajectoire de la particule $(n+1)$ pour le pas de temps suivant comme suit:

$$\chi_{n+1}^{t+1} = x_E + \varepsilon\Delta t V(r_{n+1}^t, I_{n+1}^t) \quad [97]$$

Le temps de parcours est $\varepsilon\Delta t$.

5) Initialisation de $(\eta^t, \varepsilon, q^t)$ et introduire la particule suivante en attente $(n+2)$ si elle a été déjà générée et ainsi de suite

Nous considérons un modèle à état interne utilisé comme un buffer entre les tronçons entrants et sortants de la jonction. Il suppose que la jonction (noté (z)) a une dimension physique et agit comme un buffer tel que les véhicules sont stockés avant de sortir sur les tronçons sortants. L'état interne a certains attributs spécifiques tels que: $N_z(t)$: Nombre total de véhicules dans le nœud, $N_{z,j}(t)$: Nombre de véhicules enregistrés dans le nœud et à destination de lien (j) , $I_z(t)$: Attribut du conducteur commun de véhicules stockés dans le nœud.

Le nombre de véhicules enregistrés dans le nœud est calculé grâce au système d'équations différentielles ordinaires suivant qui traduit la conservation de véhicules:

$$\begin{cases} \frac{dN_{z,j}(t)}{dt} = -R_j + \sum_i \gamma_{ij} Q_i(t) \quad \forall j \\ N_z(t) = \sum_j N_{z,j}(t) \\ \frac{d(N_z(t)I_z(t))}{dt} = \sum_i Q_i(t)I_i(z^-, t) + \sum_j R_j(t)I_z(t) \end{cases} \quad [18]$$

En effet, au sujet de la limite supérieure de la capacité du nœud à notre avis nous avons besoin également d'introduire une limite supérieure sur $N_z(t)$ qui correspond au nombre maximal physique des véhicules qui peuvent être stockés dans le nœud. Nous introduisons les coefficients $(\beta_i)_j$ qui représentent la fraction de l'espace disponible pour les véhicules venant de (i) par rapport à l'espace total disponible pour tous les tronçons entrants. Nous pouvons alors définir les fonctions partielles d'offre et de demande:

$$\begin{cases} \sum_i(t) = \beta_i \sum_z(N_z(t), I_z(t)) & \text{Modèle linéaire de répartition de l'offre} \\ \Delta_j(t) = \frac{N_{z,j}(t)}{N_z(t)} \Delta_z(N_z(t), I_z(t)) & \text{Modèle FIFO de répartition de la demande} \end{cases} \quad [19]$$

En effet, pour éviter toute perte d'information sur l'attribut du conducteur, il convient de noter que dans l'équation ci-dessous la composition du trafic $I_z(t)$ dans le nœud est supposée être conservée sur les tronçons sortants. Nous pouvons penser à une règle différente en dehors de la jonction, les conducteurs ne sont plus

"contraints" et ils peuvent naturellement reprendre leur attribut initial. Nous supposons que nous avons seulement l'information d'affectation de particules à savoir la matrice $(\beta_{i,j})_{i,j}$, qui décrit la proportion de particules provenant du tronçon $i \in I$ qui veulent quitter la jonction sur le tronçon $j \in J$. Dans ce cas, on considère qu'une particule qui entre dans la jonction du tronçon i sortira sur le tronçon j avec une probabilité de $\beta_{i,j}$. Cette loi de probabilité pour décrire la dynamique interne de la jonction satisfait :

$$\sum_j \rho(i \rightarrow j) = \sum_j \beta_{i,j} = 1 \quad [20]$$

En effet, nous considérons qu'une fois les particules ont pénétré la jonction, quelles que soient leurs origines, elles sont immédiatement affectées au buffer correspondant à leurs souhaits de tronçon sortant $j \in J$. Nous notons qu'il est aussi possible de considérer qu'à l'intérieur de la jonction, toute particule a un temps de déplacement non négligeable avant de rejoindre leur sortie, qui peut être affectée par le nombre total de particules à l'intérieur de la jonction.

5. Résultats de simulation

Le modèle qu'on a choisi pour représenter la vitesse $v_n(t)$ est le modèle 1-phase de Colombo proposé par (Colombo, 2002).

La fonction de la demande δ^t est définie comme suit :

$$\delta^t = \begin{cases} v_{\max} \rho & \text{si } \rho \leq \rho_{crit} \\ q_{\max}(I) & \text{si } \rho \geq \rho_{crit} \end{cases} \quad [21]$$

Alors que la fonction d'offre de flux de trafic σ^t est donnée par :

$$\sigma^t = \begin{cases} q_{\max}(I) & \text{si } \rho \leq \rho_{crit} \\ (q_* + \rho I) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) & \text{si } \rho \geq \rho_{crit} \end{cases} \quad [22]$$

Avec:

$$q_{\max}(I) = (q_* + \rho_{crit}(I)I) \left(1 - \frac{\rho_{crit}(I)}{\rho_{\max}} \right) \quad [23]$$

Pour que les paquets de véhicules respectent la distance inter-véhiculaire minimale, il faut respecter la condition de stabilité CFL suivante :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta N}{\rho_{\max}(I_+) W_{\max}(I_+)} \quad [24]$$

Avec $\rho_{\max}(I)$ est la densité maximale pour $\mathfrak{S}(\rho, I) \geq 0$ et $W_{\max}(I) = \partial_{\rho} \mathfrak{S}(\rho, I)|_{\rho=\rho_{\max}(I)}$.

Les données de simulation utilisées sont : $\Delta t = 0.1s$, $V_{\max} = 25m.s$, $\rho_{\max} = 0.2veh/m$, $\Delta N = 4$, $I_{\max} = 5veh/m$, $I_{\min} = 0veh/m$. Nous présentons dans les figures ci-dessous les résultats de simulation d'un exemple numérique d'une jonction avec deux tronçons entrants et deux tronçons sortants, sur une longueur totale du réseau égale à 210 mètres, avec l'emplacement de la jonction (avec une longueur de l'intersection égale à 10 mètres) est 100 mètres.

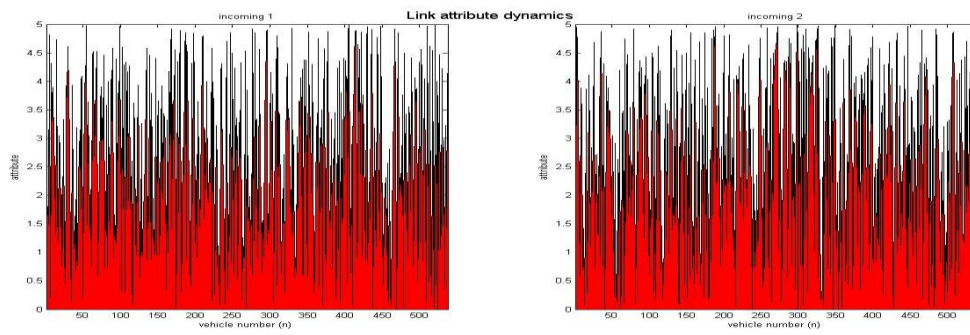


Figure 1. Valeurs d'attribut de particules pour tronçon entrant 1 et tronçon entrant 2

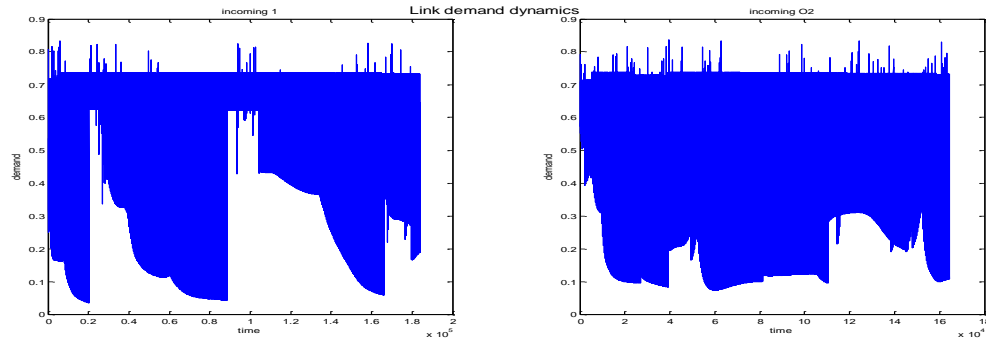


Figure 2. Valeurs de demandes pour tronçon entrant 1 et tronçon entrant 2

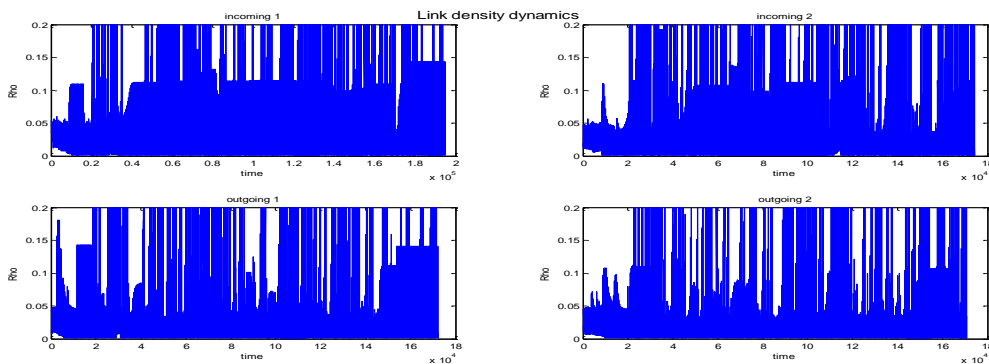


Figure 3. Valeurs de densités pour les tronçons entrants et les tronçons sortants

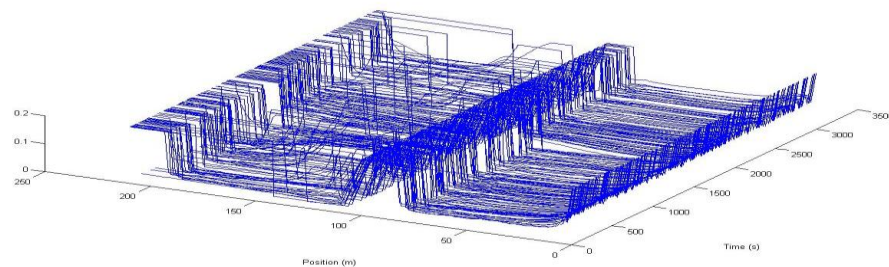


Figure 4. Distribution des trajectoires de paquets de véhicules

Nous remarquons dans cet exemple de simulation que notre méthode numérique peut récupérer avec précision à l'intersection (à une position égale à 100 mètres) l'onde de choc ou de décélération due à la congestion et à la formation de file d'attente en amont de la jonction (décélération des paquets de véhicules), et après l'onde de raréfaction ou d'accélération due à la diminution de la demande en amont, qui atténue la congestion plus tard.

6. Conclusion

En décomposant le problème en deux cas d'étude, le cas des conditions aux limites en amont et le cas des conditions aux limites en aval, la modélisation de l'intersection est étudiée dans ce papier. Nous avons discuté une nouvelle méthode numérique pour affronter la famille GSOM, posé sur une jonction. La formulation du modèle GSOM sous la forme d'un modèle de second ordre avec un diagramme fondamental translaté, fournit un très bon outil pour le calcul des conditions aux limites et la modélisation de l'intersection. L'approche de modélisation que nous avons proposée se base sur une approche physique qui a une plus grande efficacité du point de vue numérique ainsi que la prise en compte du principe fondamental d'invariance. Les méthodes existantes pour la modélisation de l'intersection au niveau des carrefours sont insuffisantes. Le modèle GSOM Lagrangien a été étudié sur des jonctions. Cela rend difficile d'exploiter les infrastructures de la circulation au maximum. Un passage plus efficace a été nécessaire afin d'améliorer la situation du trafic. Nous avons proposé alors dans ce cadre de nouveaux algorithmes de traitement des conditions aux limites en amont et en aval, ainsi que l'application d'un modèle d'intersection à état interne. Une perspective de la recherche serait de comparer les résultats numériques obtenus avec notre nouveau schéma monotone de modélisation de l'intersection et ceux obtenus à partir de l'approche variationnelle de [LEB 13] adaptée pour la modélisation de la jonction.

7. Bibliographie

- [AW 00] Aw A. and Rascle M. Resurrection of second order models of traffic flow. In SIAM journal on applied mathematics. 2000.
- [COL 02] Colombo R. M. Hyperbolic traffic flow model. In Mathematical and computer modeling. 2002.
- [COS 15] Costeseque G., Lebacque J.-P., Khelifi A. Lagrangian GSOM traffic flow models on junctions. IFAC-PapersOnLine 48 (1). 2015.
- [KHO 08] Khoshyaran M. M. and Lebacque J.-P. Lagrangian modelling of intersections for the gsom generic macroscopic traffic flow model. In Proceedings of the 10th International Conference on Application of Advanced Technologies in Transportation, Athens, Greece. 2008.
- [KHO 09] Khoshyaran M. M. and Lebacque J.-P. A stochastic macroscopic traffic model devoid of diffusion. In Traffic and Granular Flow'07, Springer. 2009.
- [LEB 07] Lebacque J.-P., Haj-Salem H., and Mammari S. Generic second order traffic flow modeling. In Proceeding of International Symposium on Transportation and Traffic Flow theory, London. 2007.
- [LEB 13] Lebacque J.-P. and Khoshyaran M. M. A variational formulation for higher order macroscopic traffic flow models of the GSOM family. In Proceeding of International Symposium on Transportation and Traffic Flow theory. 2013.
- [LIG 55] Lighthill M. J. and Whitham G. B. On kinematic waves II: A theory of traffic flow on long crowded roads. In ProRoySoc. 1955.
- [RIC 56] Richards P. I. Shock waves on the highway. In Operations research. 1956.
- [TRE 15] Treiber, M., Kanagaraj, V., Comparing numerical integration schemes for time-continuous car-following models. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2015.
- [ZHA 02] Zhang H. M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. In Transportation Research Part B. 2002.
- [ZHA 09] Zhang P. E., Wong S. H. and Dai S. Q. A conserved higher-order anisotropic traffic flow model: description of equilibrium and non-equilibrium flows. In Transportation Research Part B: Methodological. 2009.