
Design de poutres entaillées en bois par les courbes de résistance

Edouard Sorin¹, Jean-Luc Coureau¹, M. Chaplain¹, F. Lanata², A. Cointe¹, P. Galimard¹

¹ I2M CNRS UMR 5295, Talence

² LUNAM, Ecole Supérieure du Bois (ESB), LIMBHA, Nantes

RÉSUMÉ.

L'objectif de cette étude est le dimensionnement de poutres entaillées à partir des courbes de résistance du matériau bois. La principale étape consiste à relier les propriétés mécaniques de rupture des bois considérés à la capacité résistance des poutres entaillées. Ce travail vise à montrer la pertinence et la faisabilité de l'approche. Afin d'y parvenir, un modèle numérique permettant d'obtenir la part du mode I et du mode II dans l'énergie de rupture totale a ainsi été développé sur Cast3m en utilisant la méthode de la VCCT (Virtual Crack Closure Technique). En parallèle, des essais ont été menés sur du pin maritime (*Pinus pinaster*) afin de comparer les différentes méthodes proposées.

ABSTRACT.

The study aims at proposing new design rules for notched beams by considering the resistance curves of wood. The main issue is to use the fracture mechanical properties of wood to predict the load-carrying capacity of notched beams. This work aims at analysing the relevance and the feasibility of the proposed approach. A numerical model giving the part of mode I and II during the crack propagation is developed on Cast3m by using VCCT (Virtual Crack Closure Technique). In parallel experiments were conducted on maritime pine (*Pinus pinaster*) to compare the different proposed methods.

MOTS-CLÉS : poutre entaillée, dimensionnement, bois, courbe-R, rupture

KEY WORDS: notched beam, design, wood, R-curve, fracture

1. Introduction

La traction perpendiculaire au fil du bois reste un point crucial pour le design des composants de structure. Depuis de longues années de nombreuses recherches se focalisent sur des critères permettant de prédire la résistance à la fissuration des composants. Actuellement l'Eurocode 5 [ECS 04], guide européen de la construction en bois, ne prend en compte qu'un seul mode de rupture pour dimensionner la taille des entailles pour les poutres non renforcées, le mode I ou mode d'ouverture. Les formulations proposées dans les normes sont pour l'instant très empiriques et basées sur une seule essence, l'Epicéa (*Picea abies*). Très peu de résultats expérimentaux mettent en avant les corrélations utilisées. Par conséquent, l'estimation du degré de sécurité des ouvrages et donc des charpentes est mal décrite, par le manque de pertinence des règles de dimensionnement. Pour remédier à cela, la réglementation préfère, en dépit de toute connaissance sur les mécanismes quasi-fragiles du bois, fixer des seuils très bas de résistances, impliquant indirectement des contraintes de réalisation en aval des projets de conception. D'autre part, aucune référence aux classes de résistance n'est faite, ou plutôt ne détaille les variations de performance des composants.

2. Mécanique de la rupture appliquée au bois

2.1. La mécanique linéaire équivalente de la rupture

Les poutres entaillées présentent des concentrations de contraintes au niveau du fond de l'entaille (Figure 1). Lors d'un chargement en flexion, ces concentrations de contraintes sont à l'origine d'une rupture locale du bois en fissuration. Le bois est un matériau quasi-fragile, ce qui veut dire qu'une baisse de résistance progressive est observée, au contraire d'un matériau purement fragile où la rupture est brutale (Figure 2).



Figure 1. Schéma d'une poutre entaillée, avec zone de concentration de contraintes

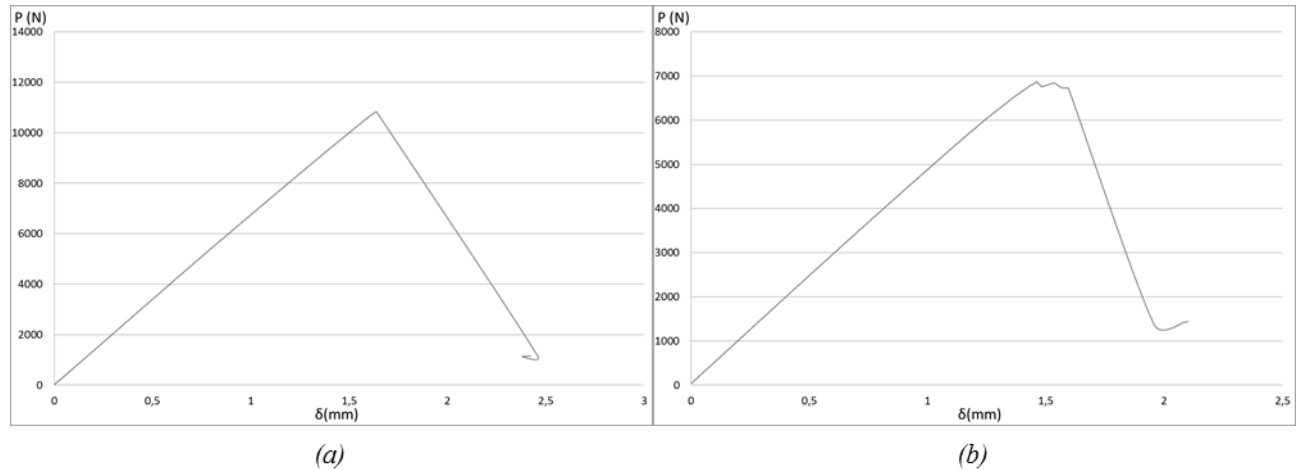


Figure 2. Courbe force/déplacement caractéristique d'un matériau : (a) fragile, (b) quasi-fragile

La MLER (Mécanique Linéaire Elastique de la Rupture) ne peut pas être utilisée dans le cas du bois à cause de son comportement quasi-fragile ; il devient donc nécessaire d'utiliser la MLEReq (Mécanique Linéaire Elastique de la Rupture équivalente) [LES 07], considérant une fissure équivalente qui donne la rigidité de l'éprouvette réelle. Cette longueur idéalise la longueur de fissure réelle et la zone d'élaboration en fond de singularité (FPZ : Fracture Process Zone) (Figure 3). Grâce à cette méthode, il devient possible de modéliser la rupture d'un matériau quasi-fragile en considérant la propagation de la fissure équivalente.

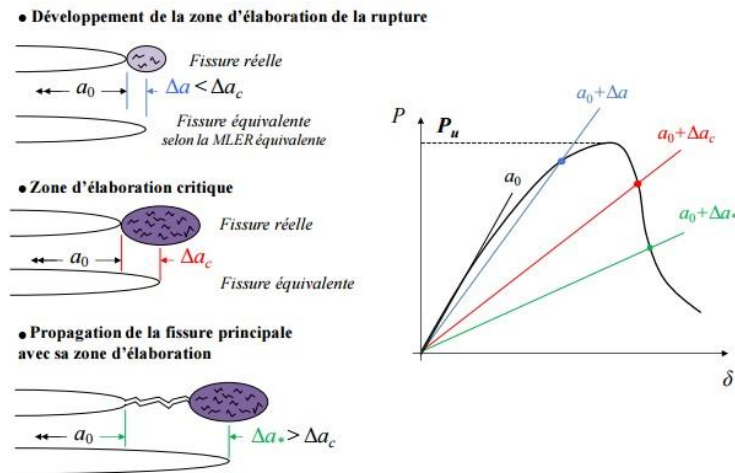


Figure 3. Analogie entre fissure réelle et fissure équivalente (figure extraite de [MOR 07])

2.2. Courbes de résistance

Afin de caractériser la rupture fragile d'un matériau, on utilise le plus souvent le taux de restitution d'énergie critique G_{RC} . Dans le cas d'un matériau quasi-fragile, le critère de rupture est donné par une courbe qui est fonction de la longueur de fissure a , $G_R(a)$, que l'on appelle courbes-R [LES 07], [MOR 07] (Figure 4). On considère que la partie croissante de la courbe représente la zone d'endommagement, FPZ, alors que la valeur

plateau correspond à la propagation de la fissure avec sa zone d'élaboration. Dans la littérature, on trouve quelques courbes-R en mode I ou mode II (Figure 5). Cependant, il n'existe que très peu de données sur des courbes-R en mode mixte. Il est difficile de découpler les effets du mode I de ceux du mode II, certaines données existent cependant sur l'Épicéa (*Picea abies*) [PHA 16b] (Figure 4).

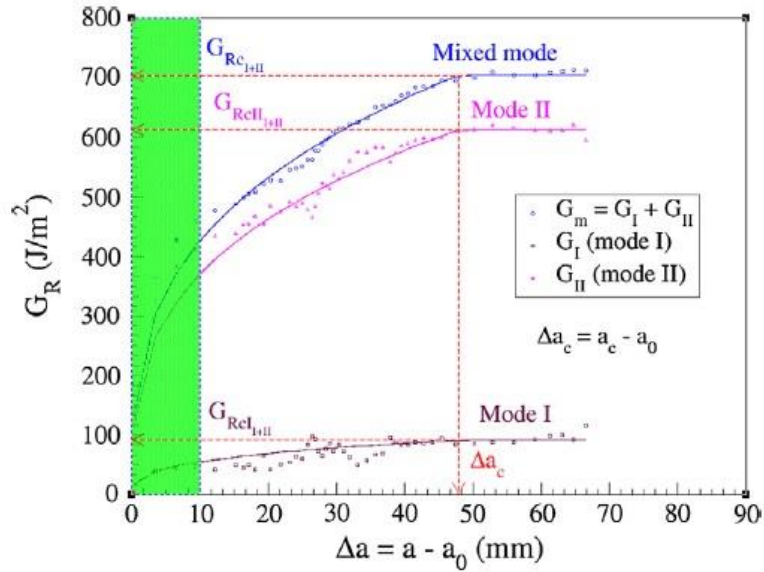


Figure 4. Exemple de courbe-R en mode pur et en mode mixte (figure extraite de [PHA 16b])

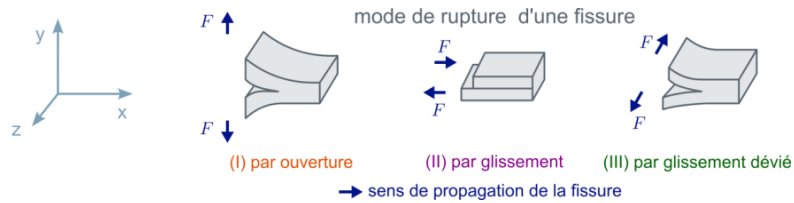


Figure 5. Les différents modes de rupture possible

3. Dimensionnement des poutres entaillées

3.1. Approche selon l'Eurocode 5

Le dimensionnement des poutres entaillées proposé dans l'Eurocode 5 se base sur l'expression développée par Gustafsson en 1988 [GUS 88]. Afin de dimensionner ces poutres particulières, Gustafsson utilise la mécanique linéaire élastique de la rupture. Il décrit la contrainte nominale en cisaillement sur la section efficace de la manière suivante :

$$\tau = \frac{1,5V}{bah} = \frac{1,5\sqrt{\frac{G_{f,I}}{h}}}{\sqrt{\frac{0,6(\alpha - \alpha^2)}{G_v} + \beta_0\sqrt{\frac{6(\frac{1}{\alpha} - \alpha^2)}{E_L}}}} \quad [1]$$

Où α et β_0 sont des ratios liés à la géométrie Figure 1, b l'épaisseur de la poutre, h la hauteur de la poutre, $G_{f,I}$ l'énergie de rupture en mode I, E_L le module d'élasticité longitudinal, G_v le module de cisaillement, V l'effort tranchant.

Pour simplifier son écriture dans l'Eurocode 5, les propriétés mécaniques présentes dans l'expression ont été prises en compte par deux constantes k_n et B , l'expression devenant alors :

$$\tau = \frac{1,5V}{b\alpha h} = f_v k_v \quad [2]$$

$$\text{Avec } k_v = \min \left[1; \frac{k_n(1 + \frac{1,1i^{1,5}}{\sqrt{h}})}{\sqrt{h}(\sqrt{\alpha - \alpha^2} + B\beta_0\sqrt{\frac{1}{\alpha} - \alpha^2})} \right], k_n = 1,5 \sqrt{\frac{G_{f,i}E_L}{f_v^2}} \sqrt{\frac{G_v}{6E_L}} \text{ et } B = \sqrt{10 \frac{G_v}{E_L}}$$

f_v la résistance au cisaillement de la poutre sans entaille, et i l'angle de l'entaille. Les valeurs de k_n et B sont prédéterminées en fonction des propriétés mécaniques de l'Epicéa, $k_n = 5$ pour du bois massif, 6,5 pour du lamellé-collé et $B=0,8$ pour le bois massif comme le lamellé-collé.

Toutefois l'expression de Gustafsson ne prend en compte que la rupture en mode I (mode d'ouverture). Or de récentes études menées par Jockwer [JOC 11], [JOC 13], ont montré l'importance de la prise en compte du mode mixte dans le dimensionnement des poutres entaillées.

3.2. Adaptation de l'équation de Gustafsson à la MLEReq

L'expression actuellement utilisée dans l'Eurocode 5 ne prend pas en compte la longueur de fissure équivalente a ; afin de pouvoir comparer les différents modèles de dimensionnement des poutres entaillées, il est donc nécessaire de l'introduire dans cette expression. Pour cela, la démarche réalisée par P. J. Gustafsson est reproduite avec l'introduction de cette longueur a . Cette démarche commence par l'étude de l'énergie de rupture G qui participe à la création d'une nouvelle fissure de longueur ∂a . Lors de cette création, l'énergie potentielle W_p diminue, cette diminution correspond à l'énergie nécessaire à la création d'une nouvelle surface de longueur ∂a .

$$G = - \frac{\partial W_p}{b \partial a} \quad [3]$$

Cette équation est reliée à la théorie des poutres par l'expression de la flèche totale δ à la mi-portée de la poutre, considérant la somme de quatre déplacements.

$$\delta = \delta_l + \delta_v + \delta_r + \delta_f \quad [4]$$

δ_l : indentation sous les appuis, n'intervient pas dans les mécanismes de rupture, et est écartée des valeurs expérimentales via une mesure relative de la flèche.

δ_v : flèche induite par l'effort tranchant

$$\delta_v = \frac{6V\beta h}{5G_v b \alpha h} \quad [5]$$

δ_f : flèche engendrée par la flexion du bras de levier de la poutre sur sa portée

$$\delta_f = \frac{12V}{E_L b h^3} \left[\frac{l^3}{24} + \frac{\beta^3 h^3}{3} \left(\frac{1}{\alpha^3} - 1 \right) \right] \quad [6]$$

δ_r : flèche produite par la variation brutale de l'inertie de l'entaille. Dans la suite, cette flèche sera considérée comme nulle.

$$\delta_r = CV\beta^2 h^2 = 0 \quad [7]$$

Pour simplifier les calculs, la flèche totale δ est écrite sous la forme :

$$\delta = A(B + \beta h)3V + D \quad [8]$$

$$\text{Avec } A = \frac{2}{5G_v b \alpha h}, B = \frac{\beta^3 \times 10 \left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha \right) G_v h}{3E_L} \text{ et } D = \frac{12Vl^3}{24E_L b h^3}$$

Le matériau bois est considéré comme purement fragile, ce qui implique que l'apparition d'une fissure engendre la rupture du composant. Dans le cas de la MLEReq, il est nécessaire de prendre en compte l'avancement progressif de la fissure. Il faut alors prendre en compte la longueur de fissure équivalente a , tel que $\beta = \beta_0 + \frac{a}{h}$. Avec $\beta_0 h$ la longueur de l'entaille après usinage de la poutre.

Lors de la propagation de fissure, la variation d'énergie potentielle s'écrit :

$$\Delta W_p(a) = \frac{1}{2} V(a)^2 \Delta \left(\frac{\delta(a)}{V(a)} \right) \quad [9]$$

Avec $\Delta \left(\frac{\delta(a)}{V(a)} \right) = \Delta C(a)$ la variation de la complaisance

D'après l'équation [3], l'équation [9] peut se réécrire:

$$G(a) b \Delta a = \frac{1}{2} V(a)^2 \Delta C(a) \quad [10]$$

L'effort tranchant sur la section réduite peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{V(a)}{b a h} = \frac{\sqrt{\frac{2G(a)}{b \alpha^2 h^2}}}{\sqrt{\frac{\partial C(a)}{\partial a}}} \quad [11]$$

$$\text{Avec } C(a) = 3 \left[A \left(\left(\beta_0 + \frac{a}{h} \right) h + B_1 \left(\beta_0 + \frac{a}{h} \right)^3 \right) \right] \text{ et } B_1 = \frac{10 \left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha \right) G_v h}{3 E_L}$$

Après dérivation de $C(a)$ en fonction de a , l'expression de l'équation [11] devient :

$$\frac{V_a(a)}{b a h} = \frac{\sqrt{\frac{G(a)}{h}}}{\sqrt{\frac{0,6\alpha}{G_v} + \frac{6 \left(\beta_0 + \frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha^2 \right)}{E_L}}} \quad [12]$$

Toutefois le terme $\frac{0,6\alpha}{G_v}$ au dénominateur pose un problème de cohérence, en effet selon cette expression plus α est petit plus la résistance au cisaillement est importante. En comparaison, l'expression de Gustafsson donne :

$$\frac{V_{0,d}^u}{b a h} = \frac{\sqrt{\frac{G_c}{h}}}{\sqrt{\frac{0,6(\alpha - \alpha^2)}{G_v} + \beta \sqrt{\frac{6 \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha^2 \right)}{E_L}}}} \quad [13]$$

En remplaçant directement β par $\beta_0 + \frac{a}{h}$ l'équation [13] devient :

$$\frac{V_b(a)}{b a h} = \frac{\sqrt{\frac{G(a)}{h}}}{\sqrt{\frac{0,6(\alpha - \alpha^2)}{G_v} + \left(\beta_0 + \frac{a}{h} \right) \sqrt{\frac{6 \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha^2 \right)}{E_L}}}} \quad [14]$$

Parallèlement, des essais de rupture en flexion 3 points sur des poutres entaillées en pin maritime (*Pinus pinaster*), ont été réalisés à une teneur en eau de 9% en moyenne, les propriétés géométriques de ces poutres sont celles utilisées dans le modèle numérique (Tableau 1). Ensuite, les différents efforts tranchants $V_a(a)$ et $V_b(a)$ sont comparés aux valeurs obtenues par la modélisation numérique réalisée à l'aide du logiciel éléments finis Cast3m $V_{EF}(a)$ elles-mêmes comparées à la valeur moyenne expérimentale de l'effort tranchant ultime $V_c^u = 4670N$ avec un COV = 18% (7 essais) (Tableau 2). La modélisation numérique est également ce qui permet de déterminer $G(a)$.

4. Modélisation du comportement à la rupture

4.1. Méthodes d'obtention de $G(a)$

Afin de comparer les différentes expressions analytiques, il est nécessaire d'utiliser l'énergie de rupture en fonction de a (Courbe de Résistance). Différentes approches sont possibles, ces méthodes peuvent être séparées en deux groupes, celles prenant uniquement en compte le mode de rupture I (méthode 1 et 2), et celles prenant en compte la mixité des modes de rupture (méthode 3 et 4).

La première méthode développée par Gustafsson considère le bois comme purement fragile et utilise une valeur constante de $G(a) = G_{RIC}$ appelée taux de restitution d'énergie critique de rupture en mode I.

La seconde méthode au contraire utilise une courbe-R pour traduire le caractère quasi-fragile du bois. Ainsi :

$$G(a) = G_{RI}(a) = \begin{cases} \frac{G_{RIC}}{\Delta a_c^{\beta_I}} \times \Delta a^{\beta_I} & \text{si } \Delta a < \Delta a_c \\ G_{RIC} & \text{si } \Delta a > \Delta a_c \end{cases} \quad [15]$$

Avec Δa_c : la longueur de fissure critique à partir de laquelle la fissure se propage avec sa FPZ, et β_I : constante à déterminer.

La méthode 3, développée par Jockwer [JOC 13], considère le bois comme purement fragile, cependant la prise en compte de la mixité oblige à lier les deux modes de ruptures via un critère, ici le critère de Wu :

$$\left(\frac{G_I^*(a)}{G_{RIC}} \right) + \left(\frac{G_{II}^*(a)}{G_{RIIC}} \right)^2 = 1 \quad [16]$$

Avec $G_I^*(a)$, $G_{II}^*(a)$ les résistances à la propagation de fissure en mode I et II et G_{RIC} , G_{RIIC} taux de restitution d'énergie critique dans chacun des deux modes.

La méthode 4, développée dans cet article, utilise les courbes-R en mode pur I et II, afin de considérer le caractère quasi-fragile du bois en rupture en mode mixte. Le critère devient alors :

$$\left(\frac{G_I^*(a)}{G_{RI}(a)} \right) + \left(\frac{G_{II}^*(a)}{G_{RII}(a)} \right)^2 = 1 \quad [17]$$

Avec

$$G_{Ri}(a) = \begin{cases} \frac{G_{Ric}}{\Delta a_{ci}^{\beta_i}} \times \Delta a^{\beta_i} & \text{si } \Delta a < \Delta a_{ci} \\ G_{Ric} & \text{si } \Delta a > \Delta a_{ci} \end{cases} \quad [18]$$

Où $i = I$ ou II .

La technique de la VCCT (Virtual Crack Closure Technique) [KRU 04], [LAR 13] est utilisée dans la modélisation par éléments finis afin d'obtenir $G_I^*(a)$, $G_{II}^*(a)$.

4.2. Exploitation des résultats

L'ensemble des valeurs des paramètres utilisés est présenté dans le Tableau 1. Ces valeurs sont inspirées de la littérature [JOC 13] et [PHA 16a], l'essence considérée est le Pin maritime (*Pinus pinaster*).

Tableau 1. Paramètres utilisés pour la modélisation et le calcul des différents efforts tranchants $V(a)$

Paramètres courbes-R		Paramètres du modèle éléments finis	
G_{RIC}	500 J/m ²	b	42 mm
G_{RIIC}	1150 J/m ²	h	114 mm
β_I	0,33	G_v	1042 MPa
β_{II}	0,38	E_L	13500 MPa
Δa_{cI}	45 mm	β_0	0,88
Δa_{cII}	50 mm	α	0,5

Pour déterminer laquelle des méthodes proposées traduit le mieux la réalité, les valeurs d'effort tranchant maximum obtenues par la modélisation numérique ont été comparées à la valeur obtenue expérimentalement, les résultats sont présentés dans le Tableau 2.

Tableau 2. Comparaison des valeurs des efforts tranchants obtenus par le modèle éléments finis selon les quatre méthodes par rapport au résultat des essais

Méthode N°	1	2	3	4
$V_{EF}(a)$	5860 N	4602 N	6271 N	5123 N
Ecart avec essai (valeur moyenne)	25%	1,4%	34%	9,7%
$G(a)$	$G_{RIC} = cte$	Eq [15]	$G_{RIC} = cte$ $G_{RIIC} = cte$ Eq [16]	Eq [17] Eq [18]

Les méthodes utilisant les courbes de résistances pour traduire le caractère quasi-fragile du bois donnent les résultats les plus proches de la réalité. Toutefois il est difficile de bien paramétrer les courbes-R, de plus le mode de rupture I agit dans la rupture à hauteur de 90% à 70%, ceci explique que la méthode 2 donne les résultats les plus proches des essais. Cependant de plus amples investigations doivent être menées pour déterminer si le mode mixte peut être négligé ou non. Ainsi, on cherche à déterminer laquelle des expressions analytiques se rapproche le plus du modèle numérique en utilisant la méthode 2 pour déterminer $G(a)$ et $V_{EF}(a)$, voir Figure 6. Les courbes obtenues à l'aide de la méthode 1 (méthode de l'Eurocode 5) ont également été tracées pour la modélisation par éléments finis et l'expression analytique de Gustafsson. Ceci montre l'importance de la prise en compte du caractère quasi-fragile du bois dans le dimensionnement.

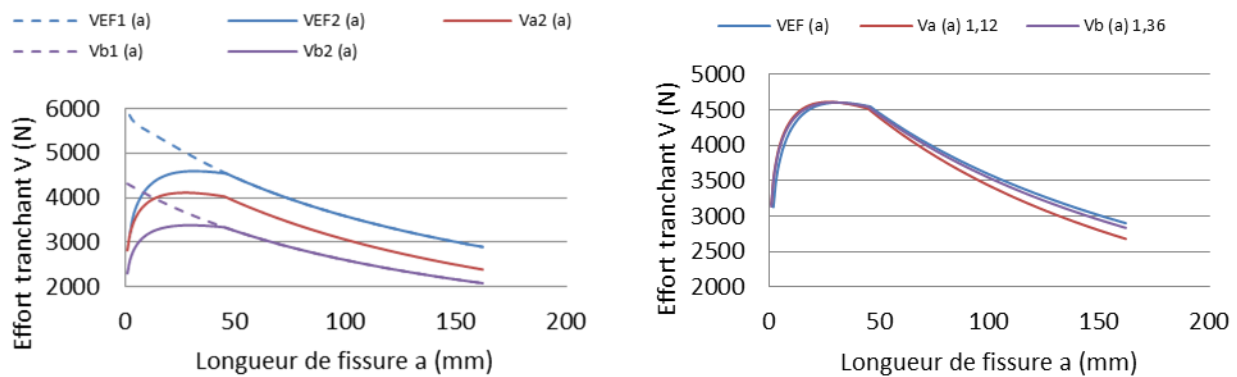


Figure 6. Graphiques comparant les allures des courbes des différentes expressions analytiques en fonction de la courbe obtenue par modélisation numérique avant et après application d'un coefficient correcteur.

Sans coefficient correcteur, l'expression analytique a (Eq. [12]) est celle qui donne la valeur maximale la plus proche de la modélisation numérique. Toutefois en termes d'allure, l'expression analytique b (Eq. [14]) est celle qui semble la plus en adéquation à la courbe obtenue par le modèle EF. Afin de comparer les allures des courbes, un coefficient correcteur constant a été choisi tel que :

$$c_{cor} = \frac{V_i(a_{max})}{V_{EF}(a_{max})} \quad [19]$$

Avec $i = a$ ou b et a_{max} la valeur de a pour laquelle V_{EF} est maximum. En appliquant un tel coefficient correcteur, on trouve une allure identique entre $V_{EF}(a)$ et $V_b(a)$, la valeur des différents coefficients correcteurs est indiquée dans la légende du graphique. Ce coefficient traduit des différences d'hypothèses entre les modèles utilisés.

5. Conclusion

Cet article présente la première étape d'un travail concernant le dimensionnement pour le renforcement de poutres entaillées. L'accent a ici été mis sur la différence entre la réalité et le dimensionnement proposé par l'Eurocode 5. Plusieurs hypothèses ont été faites pour décrire les mécanismes de ruines. La première concerne la prise en compte du caractère quasi-fragile du bois à l'aide des courbes de résistance (Courbe-R), ainsi que la rupture en mode mixte.

Au vu des écarts observés, l'utilisation des courbes-R permet de traduire bien plus finement la rupture que la simple prise en compte des énergies de rupture critique. La charge maximale admissible pour la poutre est atteinte avant que la fissure ne se propage avec sa FPZ. En ce qui concerne le mode mixte, bien que dans ce cas l'écart soit plus important pour la méthode 4 que 2, si l'on réalise la même comparaison avec les contraintes en cisaillement, c'est la méthode 4 qui donne les meilleurs résultats. Ceci peut s'expliquer par la difficulté de correctement paramétrer les courbes-R des deux modes et de bien choisir le critère des liaisons ; de futures investigations sont prévues sur cet aspect.

Pour ce qui est des expressions analytiques, l'ajout d'un coefficient correcteur permettant de réajuster les courbes obtenues via les expressions analytiques montre que la formule de Gustafsson adaptée à la MLEReq donne les meilleurs résultats. Toutefois, il est nécessaire de comprendre l'influence des différentes propriétés géométriques et mécaniques des poutres sur ce coefficient correcteur.

6. Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier l'Agence National de la Recherche (ANR) pour sa contribution, dans l'étude présentée ici, à travers le projet Xyloplate, Equipex XYLOFOREST (ANR-10-EQPX-16).

Références

- [ECS 04] European Committee for Standardization CEN: NF EN 1995-1-1: Eurocode 5: Conception et calcul des structures en bois – Partie 1-1: Généralités – Règles communes et règles pour les bâtiments, 2004.
- [GUS 88] GUSTAFSSON P. J., « A study of strength of notched beams. » *CIB W18-A Meeting 21*, 1988.
- [JOC 11] JOCKWER R., « Impact of material properties on the fracture mechanics design approach for notched beams in Eurocode 5 » *International council for research and innovation in building and construction, Working Commission W18 – Timber structures Meeting 44*, Août 2011.
- [JOC 13] JOCKWER R., « Enhanced design approach for reinforced notched beams » *International council for research and innovation in building and construction, Working Commission W18 – Timber structures Meeting 46*, Août 2013.
- [KRU 04] KRUEGER R., « Virtual crack closure technique: History, approach, and applications » *Appl. Mech. Rev.*, vol. 57, n° 2, p. 109–143, 2004.
- [LAR 13] LARTIGAU J., Caractérisation du comportement d'assemblages par goujons collés dans les structures bois, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1, 2013.
- [LES 07] LESPINE I., Influence de la géométrie des structures sur les propriétés de rupture dans les matériaux quasi-fragiles. Thèse de doctorat, Bordeaux 1, 2007.
- [MOR 07] MOREL S., « R-curve and size effect in quasibrittle fractures: Case of notched structures » *Int. J. Solids Struct.*, vol. 44, n° 13, p. 4272–4290, 2007.
- [PHA 16a] PHAN N. A., Simulation of time-dependent crack propagation in a quasi-brittle material under relative humidity variations based on cohesive zone approach : application to wood, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux, 2016
- [PHA 16b] PHAN N. A., « Mixed-mode fracture in a quasi-brittle material: R-curve and fracture criterion – Application to wood » *Eng. Fract. Mech.*, vol. 156, p. 96–113, 2016.