
Approches basées sur le krigeage pour l'analyse probabiliste des fondations superficielles filantes reposant sur des sols variant spatialement

Jawad Thajeel¹, Tamara Al-Bittar², Abdul-Hamid Soubra³

¹PhD student (Université de Nantes, Bd. de l'Université, 44603 Saint-Nazaire, France, E-mail:Jawad.thajeel@etu.univ-nantes.fr)

²Associate professor, (Université Libanaise, Tripoli, Al Kobeh, Liban, E-mail: Tamara.albittar@gmail.com)

³Professor, (University of Nantes, Bd. de l'Université, 44603 Saint-Nazaire, France, E-mail: Abed.Soubra@univ-nantes.fr)

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on se propose de déterminer l'effet de la variabilité spatiale des propriétés du sol sur la probabilité Pf de dépasser la capacité portante ultime des fondations superficielles. Dans les études probabilistes existantes prenant en compte la variabilité spatiale des propriétés du sol, la méthode de simulation de Monte-Carlo (Monte Carlo Simulation MCS) est généralement utilisée pour déterminer la probabilité de ruine. Il est bien connu que cette méthode est très coûteuse en temps de calcul en raison du grand nombre d'appels du modèle déterministe. Pour surmonter cet inconvénient, cet article présente une approche probabiliste plus efficace qui réduit considérablement le nombre d'appels du modèle déterministe. La méthodologie de krigeage et sa combinaison avec différentes méthodes de simulation [Méthode de Monte Carlo (MCS), Méthode du tirage d'importance (Importance Sampling IS) et méthode du Subset Simulation (SS)] est proposée dans cet article. L'objectif est de calculer la probabilité Pf de dépasser la capacité portante ultime des fondations superficielles reposant sur un sol variable spatialement.

MOTS-CLÉS : Variabilité spatiale, krigeage, probabilité de ruine, Simulation de Monte Carlo, Tirage d'importance, Subset Simulation.

ABSTRACT. In this paper, it is proposed to study the effect of the spatial variability of soil properties on the probability Pf of exceeding the ultimate bearing capacity of shallow foundations. In the existing probabilistic studies taking into account the spatial variability of soil properties, Monte Carlo simulation (MCS) method is generally used to determine the probability of failure. This methodology is not suitable for the computation of a small failure probability because it becomes very time-expensive in such cases due to the large number of simulations required to calculate the failure probability. To overcome this disadvantage, this paper presents a more efficient probabilistic approach that considerably reduces the number of calls of the deterministic model. The kriging methodology and its combination with different simulation methods simulation [Monte Carlo Simulation (MCS), Importance Sampling (IS) and Subset Simulation (SS)] is proposed in this paper. The objective is to compute the probability Pf of exceeding the ultimate bearing capacity of shallow foundations resting on a spatially varying soil mass.

KEY WORDS: spatial variability, kriging, probability of failure, Monte Carlo Simulation, Importance Sampling, Subset Simulation.

1. Introduction

Dans ce travail, on se propose de déterminer l'effet de la variabilité spatiale des propriétés du sol sur la probabilité P_f de dépasser la portance ultime des fondations superficielles. Dans les études probabilistes existantes prenant en compte la variabilité spatiale des propriétés du sol, la méthode de simulation de Monte-Carlo (MCS) est généralement utilisée pour déterminer P_f . Il est bien connu que cette méthode est très coûteuse en temps de calcul en raison du grand nombre d'appels du modèle déterministe. Pour surmonter cet inconvénient, cet article présente une approche probabiliste plus efficace qui réduit considérablement le nombre d'appels du modèle déterministe. La méthodologie de krigeage et sa combinaison avec différentes méthodes de simulation [Méthode de Monte Carlo (MCS), Méthode du tirage d'importance (Importance Sampling IS) et méthode du Subset Simulation (SS)] est proposée dans cet article. L'objectif est de calculer probabilité P_f de dépasser la capacité portante ultime d'une fondation superficielle filante reposant sur un sol variable spatialement. Le modèle déterministe est basé sur des simulations numériques utilisant le logiciel de différences finies FLAC^{3D}. La cohésion et l'angle de frottement interne sont considérés comme deux champs aléatoires anisotropes et non-Gaussiens. Ils sont caractérisés par deux fonctions de répartition (CDF) différentes et une fonction d'autocorrélation identique. La méthodologie proposée par [VOR 08] est employée pour générer ces deux

champs aléatoires. Trois méthodes basées sur le Krigeage sont utilisées pour effectuer l'analyse probabiliste. Ces méthodes sont (i) AK-MCS qui combine le Krigeage avec la méthode de simulation de Monte Carlo (MCS), (ii) AK-IS qui combine le Krigeage avec la méthode du tirage d'importance (IS) et (iii) AK-SS qui combine le Krigeage avec la méthode de subsetsimulation (SS). Ce papier est organisé comme suit : Dans un premier temps, on va présenter les trois méthodes basées sur Krigeage (i.e. AK-MCS, AK-IS et AK-SS) et puis, on présentera une analyse des résultats numériques probabilistes obtenus.

2. Approches basées sur le krigeage

2.1. La méthode AK-MCS

AK-MCS est une méthode d'apprentissage alliant krigeage et simulation de Monte Carlo pour évaluer efficacement P_f [ECH 11]. La méthode consiste à construire une population de Monte Carlo de N points suivant les distributions des variables aléatoires et de sélectionner un nombre initial N_1 de points pour être évalués par le modèle et constituer le premier plan d'expérience. Ce plan est ensuite utilisé comme base de krigeage, et pour estimer la prédiction de la fonction de performance $\hat{G}(x)$ ainsi que sa variance $\sigma_{\hat{G}}^2(x)$ en tous points de la population de Monte Carlo N . Grâce au calcul des $\hat{G}(x)$ et des $\sigma_{\hat{G}}^2(x)$ associées, il est possible de construire un critère permettant de classer les points de la population de Monte Carlo par ordre de pertinence pour l'enrichissement du plan d'expérience. Ce critère est défini comme le rapport entre l'estimation et l'écart-type de krigeage [i.e. $U(x) = |\hat{G}(x)| / \sigma_{\hat{G}}(x)$]. $U(x)$ représente le nombre d'écart-types qui sépare l'estimateur de l'état limite au point x . Les points dont la valeur de U est petite, typiquement inférieure à 2, se trouvent dans une zone très incertaine où le signe du point x est très incertain. Le point qui minore la fonction $U(x)$ est donc ajouté au plan d'expérience pour être évalué par le modèle et utilisé dans un nouveau krigeage sur les points de la population de Monte Carlo. L'enrichissement du plan d'expérience se poursuit jusqu'à ce que la valeur de $U(x)$ soit suffisamment grande, c'est à dire que les points restants soient en dehors de la zone incertaine. Dans cet article, le critère d'arrêt du processus d'enrichissement est $U(x) > 2$. A la fin du processus d'enrichissement, la probabilité de défaillance P_f et le coefficient de variation $COV(P_f)$ peuvent être estimées. Si le coefficient de variation obtenu n'est pas satisfaisant, le nombre de points de la population de Monte Carlo est augmenté, et la procédure est reprise en partant du dernier plan d'expérience utilisé.

2.2. La méthode AK-IS

AK-MCS est une méthode d'apprentissage alliant krigeage et tirage d'importance (Importance Sampling IS) pour évaluer efficacement P_f . Cette méthode constitue une amélioration de la méthode AK-MCS car elle réduit encore plus le nombre d'appels au code déterministe. Cette méthode était proposée par [ECH 13] dans le cas simple d'une fonction de performance ayant une forme analytique. Dans cet article une extension de la méthode au cas où la fonction de performance est basée sur des simulations numériques (i.e. code élément finis/différence finis) est présentée. La procédure AK-IS se compose de deux étapes principales. Tout d'abord, le point de rupture le plus probable (point de conception) est déterminé à l'aide d'un méta-modèle approximatif construit par krigeage et basé sur un petit nombre d'échantillons. Ensuite, le méta-modèle approximatif de krigeage est successivement amélioré via un processus d'enrichissement en ajoutant plus d'échantillons sélectionnés à partir d'une fonction de densité de probabilité $h_x(X)$ centrée au point de conception. Lorsque l'apprentissage s'arrête, il faut calculer les valeurs estimées à la fois de la probabilité de ruine P_f et le coefficient de variation. Il convient de noter ici que le critère d'arrêt est similaire à celui présenté dans la procédure AK-MCS (i.e. $\min(U) > 2$). À la fin, il convient de souligner que le temps de calcul des prédictions est significativement plus petit que ce qui serait nécessaire si l'on utilisait l'approche AK-MCS par [ECH 11] où un échantillonnage MCS (pas d'échantillonnage d'importance) a été utilisé pour déterminer les échantillons candidats. En effet, le nombre d'échantillons candidats utilisés dans AK-IS est beaucoup plus faible pour la même valeur du coefficient de variation sur P_f conduisant ainsi à une réduction considérable du temps de calcul.

2.3. La méthode AK-SS

AK-SS est une méthode d'apprentissage alliant krigeage et subsetsimulation (SS) pour évaluer efficacement P_f . La procédure AK-SS se compose de deux étapes principales. Dans la première étape, un méta-modèle approximatif est construit par krigeage en utilisant un faible nombre d'échantillons appelés plan d'expérience initial (Initial Design of Experiments (DoE)). Ces échantillons sont choisis arbitrairement parmi une population relativement faible générée par MCS. Ensuite, le méta-modèle approximatif est successivement amélioré par un processus d'enrichissement en ajoutant plus d'échantillons au DoE initial. Ces échantillons sont choisis parmi les échantillons générés par MCS utilisant la même fonction d'apprentissage présentée dans la méthode AK-MCS. Il convient de mentionner ici que le méta-modèle obtenu après le processus d'enrichissement ne peut être considéré comme très précis si l'on utilise une population relativement petite générée par MCS. Ainsi, une deuxième étape

qui utilise l'approche de subetsimulation pour générer des échantillons qui sont dirigés vers la surface d'état limite a été effectuée. L'objectif est d'utiliser le méta-modèle relativement précis obtenu à partir de la première étape pour atteindre la zone de défaillance (c'est-à-dire une zone proche de la surface d'état limite $G = 0$) en utilisant la méthodeSS. De cette manière, on atteint la zone de défaillance sans coût de calcul supplémentaire parce que la méthodeSS est effectuée en utilisant le méta-modèle relativement précis obtenu à partir de la première étape. Une fois que l'on atteint la zone de défaillance, le méta-modèle relativement précis est successivement amélioré à nouveau par un procédé d'enrichissement en ajoutant d'autres échantillons. Ces échantillons sont choisis parmi les échantillons générés par SS au niveau final en utilisant la même fonction d'apprentissage présentée dans AK-MCS (i.e. $\min(U)$). Cette fonction d'apprentissage permet de sélectionner les échantillons les plus proches de la surface d'état limite $G = 0$. De cette manière, le méta-modèle relativement précis obtenu à partir de la première étape est maintenant suffisamment amélioré et peut être considéré comme précis à la fin de la deuxième étape.

La nouvelle méthode AK-SS utilise les avantages de la méthodeSS pour l'évaluation de petites probabilités de défaillance et du modèle de krigeage qui fait appel à la fonction d'apprentissage pour l'approximation de la fonction de performance. Le principal avantage de AK-SS sur AK-MCS devient visible en cas de faibles probabilités de défaillance. L'effort de calcul d'AK-MCS augmente considérablement dans le cas où des grandes populations sont nécessaires pour évaluer des faibles probabilités de ruine. Cependant, AK-SS résout ce problème en exprimant la faible probabilité de ruine en tant que produit de probabilités de ruine conditionnelles plus importantes de plusieurs événements de défaillance intermédiaires.

3. Résultats numériques

Cette section vise à présenter l'effet de la variabilité spatiale du sol sur la probabilité P_f de dépasser la capacité portante ultime d'une fondation superficielle filante soumise à une charge verticale centrée. La fonction de performance utilisée dans l'analyse est donnée par l'équation suivante:

$$G = \frac{q_u}{q_s} - 1 \quad [1]$$

Où q_u est la capacité portante calculée ici en utilisant le logiciel FLAC^{3D}. D'autre part, la cohésion c et l'angle de frottement interne φ sont considérés comme deux champs aléatoires anisotropes non-Gaussiens. L'angle de frottement interne φ est supposé suivre une loi bêta, et la cohésion c est supposée lognormale. Les valeurs moyennes et les coefficients de variation des deux champs aléatoires sont donnés comme suit: $\mu_c = 20 \text{ kPa}$, $Cov_c = 25\%$; $\mu_\varphi = 30^\circ$, $Cov_\varphi = 10\%$. Le modèle déterministe est basé sur des simulations numériques utilisant le logiciel aux différences finies FLAC^{3D}. Le domaine du sol adopté dans l'analyse est de 15B de large par 6B de profondeur. La fondation superficielle filante de $B=1\text{m}$ de largeur et de 0.5m de hauteur est supposée non pesante et élastique. Afin d'éviter la répétition, ce modèle mécanique n'a pas été fourni ici et le lecteur peut se référer à [A1-B 13-14].

3.1 Effet de la distance d'autocorrélation sur la probabilité de défaillance

Cette section présente l'effet de la distance d'autocorrélation ($a_x = a_y$) sur P_f et $COV(P_f)$ pour le cas d'un champ aléatoire isotrope.

La figure 1 montre que P_f augmente avec l'augmentation de la distance d'autocorrélation, et le taux d'augmentation est significative pour les petites valeurs des distances d'autocorrélation (quand $a_x = a_y < 20\text{m}$). Cependant, ce taux devient plus faible pour les grandes valeurs des distances d'autocorrélation (quand $a_x = a_y > 20\text{m}$). Effectivement, [A1-B 13] ont montré que la variabilité de la capacité portante diminue avec l'augmentation de l'hétérogénéité du sol (i.e. pour les faibles valeurs de la distance d'autocorrélation) puisque la zone impliquée par le mécanisme de défaillance possible aura des valeurs moyennes des paramètres de résistance au cisaillement proches des valeurs moyennes des deux champs. Ceci conduit à des valeurs proches de la capacité portante ultime et donc à une plus petite variabilité de cette capacité portante. Cela signifie que le nombre des réalisations conduisant à la rupture est très faible dans ce cas, ce qui conduit à une plus petite valeur de la probabilité de défaillance. Au contraire, le nombre de réalisations conduisant à la rupture est plus élevé dans le cas d'un sol homogène du fait que les réalisations sont homogènes dans ce cas avec des valeurs faibles ou élevées de la résistance du sol d'une réalisation à une autre.

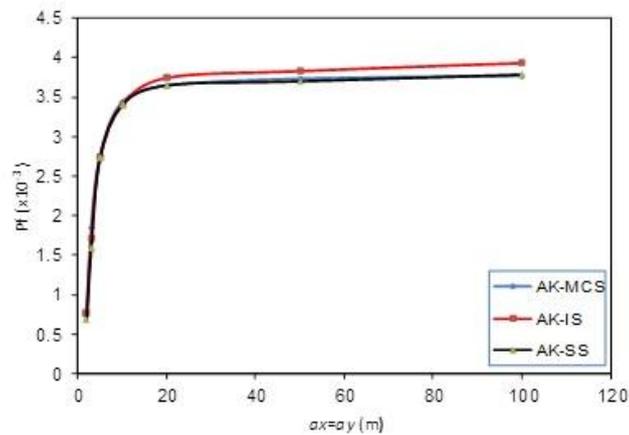


Figure 1. Effet de la distance d'autocorrélation isotrope $a_x=a_y$ sur P_f

4. Conclusion

L'effet de la variabilité spatiale des paramètres de résistance au cisaillement du sol sur la probabilité P_f de dépasser la capacité portante ultime d'une fondation superficielle filante a été étudié. Ces paramètres ont été modélisés par des champs aléatoires. Le modèle déterministe est basé sur des simulations numériques utilisant le logiciel aux différences finies FLAC^{3D}. Une méthodologie efficace de propagation d'incertitude a été employée dans ce travail. Cette méthodologie utilise une combinaison efficace de la méthode de krigeage et des méthodes de simulations (MCS, IS et SS) pour calculer efficacement P_f . La première méthode AK-MCS, est une méthode d'apprentissage alliant krigeage et méthode de simulation de Monte Carlo. Cette méthode devient exigeante en temps de calcul pour des valeurs de la probabilité de défaillance inférieures à 10^{-3} . AK-IS Est une autre approche qui classe les points simulés à proximité du point de conception. Le coût de calcul est considérablement réduit, mais l'approche repose sur l'hypothèse que le point de conception est unique. Enfin, AK-SS basée sur le subsetsimulations surmonte les difficultés des deux méthodes AK-MCS et AK-IS. Elle ne nécessite pas la connaissance a priori du point de conception et réduit énormément le nombre d'échantillonnage nécessaire. La principale conclusion peut être résumée comme suit: la probabilité de défaillance P_f Augmente avec l'augmentation de la distance d'autocorrélation. Notons cependant que le taux d'augmentation est plus petit pour les grandes valeurs des distances d'autocorrélation (quand $a_x=a_y > 20$ m).

5. Bibliographies

- [Al-B 14] Al-Bittar, T., and Soubra, A.-H. «Efficient sparse polynomial chaos expansion methodology for the probabilistic analysis of computationally-expensive deterministic models» *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol 38, n° 12, 2014, p.1211–1230.
- [Al-B 13] Al-Bittar, T., and Soubra, A. H. «Bearing capacity of strip footings on spatially random soils using sparse polynomial chaos expansion» *International Journal of numerical and analytical methods in Geomechanics*, vol 37 n° 13, 2013, p.2039–2060.
- [ECH 11] Echard, B., Gayton, N., and Lemaire, M. «AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation» *Structural Safety*, Elsevier Ltd, vol 33 n° 2, 2011, p.145–154.
- [ECH 13] Echard, B., Gayton, N., Lemaire, M., and Relun, N. «A combined Importance Sampling and Kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models» *Reliability Engineering and System Safety*, vol 111, 2013, p. 232–240.
- [VOR 08] Vořechovský, M. «Simulation of simply cross correlated random fields by series expansion methods» *Structural Safety*, vol 30 n° 4, 2008, p.337–363.