Propagation locale et non-locale de la chaleur dans un barreau hétérogène

Belmoujahid Y.[1], Challamel N.[2], Picandet V.[3]

[1] *Université de Bretagne Sud, FRE CNRS 3744 IRDL, Centre de Recherche, Rue de Saint Maudé, BP 92116, 56321 Lorient, E-mail : benjamin.herisson@.univ-ubs.fr*

[2] *Université de Bretagne Sud, FRE CNRS 3744 IRDL, Centre de Recherche, Rue de Saint Maudé, BP 92116, 56321 Lorient, E-mail : noel.challamel@univ-ubs.fr*

[3] *Université de Bretagne Sud, FRE CNRS 3744 IRDL, Centre de Recherche, Rue de Saint Maudé, BP 92116, 56321 Lorient, E-mail : vincent.picandet@univ-ubs.fr*

RÉSUMÉ. On s'intéresse à l'étude de la conduction thermique dans un barreau hétérogène. L'équation de diffusion thermique unidimensionnelle est étudiée pour des systèmes de taille finie et semi-infinie. La solution analytique exacte de cette solution est donnée sous forme d'une série de Fourier, pour des conditions initiales uniformes et des conditions aux limites de température imposée. Cette solution exacte est comparée à la solution de l'équation de la chaleur locale valable pour un barreau homogène. L'objectif de ce travail est d'étudier l'équation de diffusion thermique non-locale pour mettre en évidence les effets d'échelle sur la conduction thermique dans les solides hétérogènes. Le facteur d'hétérogénéité influe sur la propagation de la chaleur. Bien que ce travail se focalise principalement sur la diffusion thermique, l'infiltration de fluide dans les milieux poreux ou la conductivité électrique peuvent être considérées comme des problèmes alternatifs de diffusion.

ABSTRACT. We study the problem of thermal conduction in a heterogeneous rod. The one-dimensional thermal diffusion equation is investigated for two systems including a finite-size system, and an infinite-size system. The exact analytical solution of this solution is given in term of Fourier series, for initial uniform temperature field and for given temperature at the borders of the finite rod. Both solutions valid for the finite and semi-infinite rod are compared and are shown to be very close up to some critical times. The objective of this work is to focus on the non-local thermal diffusion equation and to demonstrate the scale effects on thermal conduction in heterogeneous solids. Although this work mainly deals with thermal diffusion, fluid infiltration in porous media or electrical conductivity may be considered as alternative diffusion problems.

….

….

….

….

….

….

….

MOTS-CLÉS : Equation de chaleur, Loi non-locale, Série de Fourier, Solides hétérogènes, Non-localité.

KEY WORDS: Heat equation, Nonlocal law, Fourier series, Heterogeneous Solids, Nonlocality.

---

1. Introduction

La modélisation par une approche non-locale est apparue dans les années 60 essentiellement en élasticité pour des problèmes de propagation d'ondes dans les cristaux, et a été largement utilisée pour décrire les phénomènes de microfissuration dans les matériaux quasi-fragiles de nature hétérogène tels que le béton [BAZ 87] Contrairement à l'approche locale, l'approche non-locale abandonne l'hypothèse selon laquelle la réponse en un point matériel d'un domaine donné dépend uniquement de ce point ; elle dépend selon cette approche d'un certain voisinage autour de ce même point. L'étendue de la zone d'interaction entre un point et son voisinage est déterminée à l'aide d'un paramètre de longueur interne qui caractérise également le degré d'hétérogénéité au sein du matériau.

Dans cet article, nous étudions un problème de diffusion thermique locale et non-locale dans un barreau hétérogène. Le problème de diffusion thermique non-locale a été étudié pour décrire le phénomène de conduction thermique dans un milieu non-local. Michelitsch et *al*. [MIC 12] ou Tarasov [TAR 14] ont développé des équations thermiques non-locales dérivées de l'espace à partir d'un modèle en treillis. Yu et *al*. [YU 15] a couplé l'élasticité non-locale d'Eringen (modèle différentiel d'ordre entier) avec la dérivée d'ordre temps-fractionnaire pour la conduction de chaleur. Challamel et *al*. [CHA 13] ont étudié analytiquement la propagation des ondes dans un modèle différentiel non-local, mettant en évidence le lieu possible entre la non-localité fractionnaire et le modèle différentiel basé sur Eringen. Challamel et *al*. [CHA 16] ont récemment étudié la propagation de la chaleur dans un milieu nonlocal à partir d'une condition initiale de variation de température bilinéaire en fonction chapeau.

Dans ce travail, nous adoptons un modèle différentiel de type Eringen pour la généralisation non-locale unidimensionnelle de la loi de Fourier [1]:

$$Q - l_c^2 Q'' = -\lambda T' \qquad [1]$$

avec Q est le flux de chaleur, T est la température, λ est la conductivité thermique et l_c est la longueur caractéristique interne de la microstructure, et qui représente en même temps le degré d'hétérogénéité au sein du matériau. A partir de l'équation [1], on peut reconnaitre un modèle différentiel non-local de type Eringen, où le flux thermique agit comme la contrainte et la température peut être associée au déplacement dans le cas analogue d'élasticité non-locale. L'équation du bilan énergétique peut s'écrire [2]:

$$\rho c \dot{T} = -Q' \qquad [2]$$

Où, ρ désigne la densité et c la capacité calorifique spécifique. Le couplage de l'équation 1 et 2 conduit à l'équation thermique non-locale [3] :

$$\dot{T} = \alpha T'' + l_c^2 \dot{T}'' \qquad [3]$$

Avec : $\alpha = \lambda / \rho c$ est la diffusivité thermique. L'équation 3 est l'équation de diffusion thermique non locale de type Eringen, qui peut aussi être valide pour la diffusion dans les milieux poreux ou pour une conduction électrique. Cette équation a été utilisée par Barenblatt [BAR 60] pour décrire l'évolution d'un flux de liquides dans les roches fissurées.

2. Solution exacte de l'équation de chaleur non-locale

Nous cherchons une solutions a cette équation de chaleur non-locale [3] avec les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes : T(0,t)=T(L,t)=0 et T(x, 0)=T_0. En utilisant la méthode de séparation des variables, on peut poser : T(x, t)= φ(x)ψ(t). L'équation de chaleur non-locale devient [4]:

$$\dot{\psi}(t)\varphi(x) = \alpha\varphi''(x)\psi(t) + l_c^2 \varphi''(x)\dot{\psi}(t) \qquad [4]$$

On divise l'équation [4] par T(x, t)= φ(x)ψ(t), on obtient l'équation [5] :

$$\frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)} = \alpha\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + l_c^2 \frac{\varphi''(x)\dot{\psi}(t)}{\varphi(x)\psi(t)} \qquad [5]$$

On suppose que $\frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)} = \alpha\gamma$ et $\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{-\gamma\alpha}{\alpha - \gamma\alpha l_c^2}$ avec les solutions suivantes [6]:

$$\begin{cases} \psi(t) = Ae^{-\alpha\gamma t} \\ \varphi(x) = B\sin(\delta x) + C\cos(\delta x) \end{cases} \qquad [6]$$

A partir des conditions aux limites, T(0,t)=T(L,t)=0, implique φ(0)=φ(L)=0. Et nous pouvons écrire [7]:

$$\varphi(x) = B\sin(\frac{m\pi x}{L}) \text{ avec } \delta = \frac{m\pi}{L},\ m=1, 2, 3\ldots \quad [7]$$

On obtient donc une solution générale sous forme d’une série de Fourier [8], où seules les composantes en sin(mπx/L) sont présentes, puisqu’on a imposé : T(0)=T(L)=0 :

$$T(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{\frac{-\alpha m^2\pi^2 t}{l_c^2 m^2\pi^2 + L^2}} \quad [8]$$

Si on pose, l_c=0, on retrouve la solution locale classique [9] :

$$T(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{\frac{-\alpha m^2\pi^2 t}{L^2}} \quad [9]$$

Les coefficients C_m sont calculés explicitement à partir des conditions initiales : [11] :

$$T_0 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad [10]$$

$$C_m = \frac{2}{L}\int_0^L T_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad [11]$$

A partir de l’équation 11, le coefficient C_m s’écrit explicitement [12] :

$$C_m = \frac{-2\,T_0}{m\,\pi}\left((-1)^m - 1\right) \quad [12]$$

La solution générale du problème en série de Fourier peut être exprimée comme suit [13] :

$$T(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2\,T_0}{m\,\pi}\left((-1)^m - 1\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{\frac{-\alpha m^2\pi^2 t}{l_c^2 m^2\pi^2 + L^2}} \quad [13]$$

Les paramètres adimensionnels sont définis comme suit [14] :

$$T^* = \frac{T}{T_0}\ ;\quad \hat{x} = \frac{x}{L}\ ;\quad \hat{l_c} = \frac{l_c}{L}\quad et\quad \tau = \alpha\frac{t}{L^2} \quad [14]$$

La solution générale en série de Fourier peut être exprimée sous une forme adimensionnelle [15] :

$$T^*(\hat{x},\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2}{m\,\pi}\left((-1)^m - 1\right) \sin(m\pi\hat{x})\, e^{\frac{-m^2\pi^2\tau}{1+\hat{l}_c^2 m^2\pi^2}} \quad [15]$$

3. Résultats et Discussions

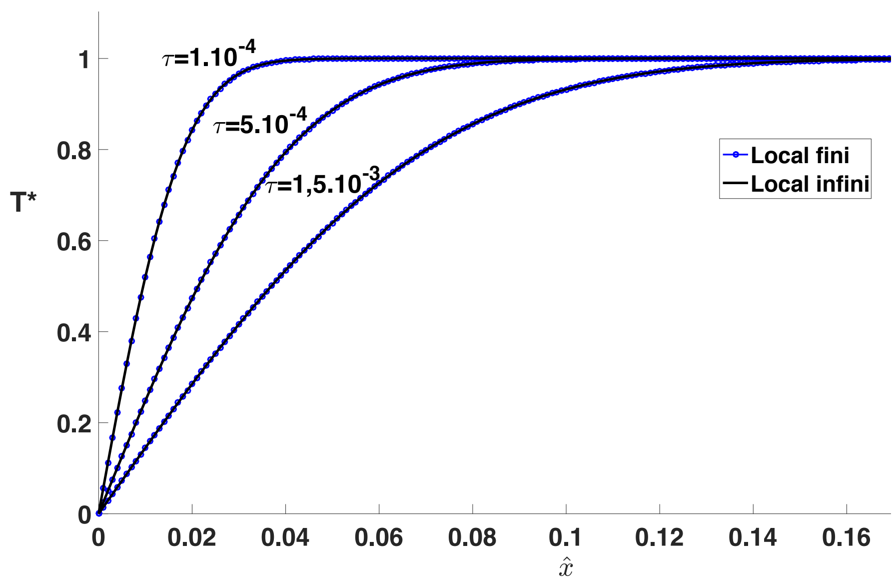

Figure 1. *Propagation de la chaleur dans un barreau fini et semi-infini – coïncidence des solutions dans les premiers instants.*

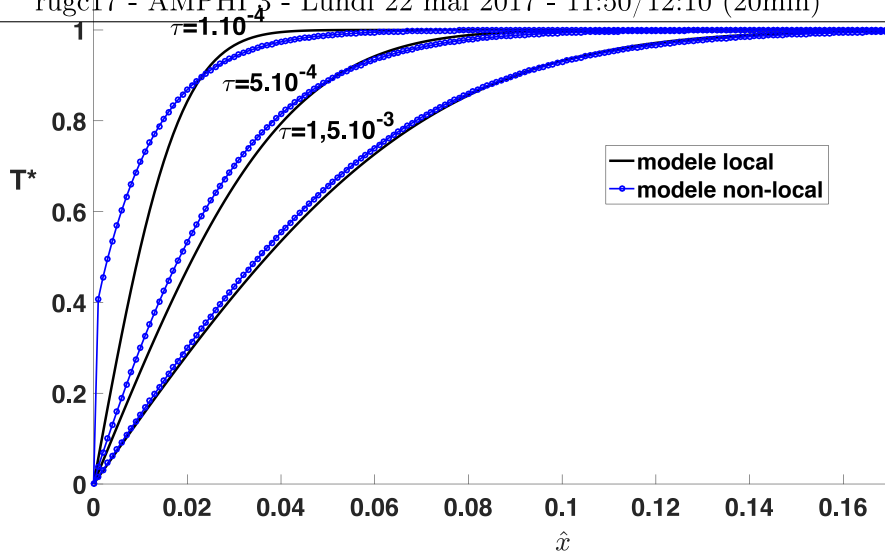

Figure 2. *Comparaison entre la solution locale et non-locale de l'équation de chaleur pour lc/L=0,01.*

La figure 1 présente la propagation de la chaleur dans deux barreaux de tailles différentes : barreau de taille finie et barreau de taille semi-infinie. L'évolution de la chaleur dans ces deux systèmes de tailles différentes dans les premiers instants est quasi-similaire. La figure 2 illustre une comparaison entre les deux solutions issues du modèle local et non-local. La propagation de la chaleur dans le barreau hétérogène est affectée, plus particulièrement dans les premiers instants.

4. Conclusion

Cette étude a porté sur un problème de conduction thermique dans un milieu hétérogène. Une solution exacte de l'équation de chaleur non-locale a été établie. Une comparaison entre les deux solutions : locale et non-locale, indique une forte convergence entre ces deux solutions pour une longueur interne suffisamment faible.

5. Bibliographie

[BAR 60] BARENBLATT, G. I, IU. P ZHELTOV, ET I. N KOCHINA. « Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks». *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 24, n° 5, 1 janvier 1960, 1286-1303.

[BAZ 87] BAŽANT, ZDENĚK P., ET GILLES PIJAUDIER-CABOT. « Nonlocal Continuum Damage, Localization Instability and Convergence ». *Journal of Applied Mechanics* 55, n° 2, 1 juin 1988, 287-93.

[MIC 12] MICHELITSCH, THOMAS M., GÉRARD A. MAUGIN, MUJIBUR RAHMAN, SHAHRAM DEROGAR, ANDRZEJ F. NOWAKOWSKI, ET FRANCK C. G. A. NICOLLEAU. « A continuum theory for one-dimensional self-similar elasticity and applications to wave propagation and diffusion ». *European Journal of Applied Mathematics* 23, n° 6, décembre 2012.

[TAR 14] TARASOV, VASILY E. « Fractional Diffusion Equations for Lattice and Continuum: Grunwald-Letnikov Differences and Derivatives Approach ». *INTERNATIONAL JOURNAL OF STATISTICAL MECHANICS*, 2014, 1-7.

[CHA 13] CHALLAMEL, NOËL, DUŠAN ZORICA, TEODOR M. ATANACKOVIĆ, ET DRAGAN T. SPASIĆ. « On the fractional generalization of Eringen's nonlocal elasticity for wave propagation ». *Comptes Rendus Mécanique* 341, n° 3, 1 mars 2013, 298-303.

[CHA 16] CHALLAMEL, NOËL, GRAZIDE CÉCILE, PICANDET V., PERROT A,, ET YINGYAN ZHANG, « A nonlocal Fourier's law and its application to the heat conduction of one-dimensional and two-dimensional thermal lattices ». *Comptes Rendus Mécanique* 344, n° 6, 2016, 388-401.

[YU 15] YU, Y. JUN, XIAO-GENG TIAN, ET XIN-RANG LIU. « Size-dependent generalized thermoelasticity using Eringen's nonlocal model ». *EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS - A/SOLIDS* 51, MAI 2015, 96-106.