

---

# Effet d'une paroi plane sur un empilement partiellement ordonné de sphères

**Roquier Gérard<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Laboratoire Navier, 2 allée Kepler, Cité Descartes, 77420 Champs-sur-Marne (France)*

---

*RÉSUMÉ. Un nouveau Modèle d'Empilement Compressible (MEC), le MEC 4-paramètres, a été élaboré pour prédire la compacité d'empilements binaires en fonction de leur composition. L'effet de paroi est pris en compte grâce au calcul de la compacité locale dans une couche de fines particules sphériques situées contre la paroi d'une grosse particule. En faisant tendre le diamètre de cette dernière vers l'infini, on obtient un modèle géométrique permettant de quantifier l'effet d'une paroi plane et lisse sur un empilement partiellement ordonné de billes.*

*ABSTRACT. A new Compressible Packing Model (CPM), the 4-parameter CPM, was developed to predict the packing density of binary mixtures depending on their composition. The wall effect is taken into account by calculating the local packing density into a layer of fine spherical particles located against the wall of a coarse particle. When the diameter of the latter tends towards infinity, the result consists in a geometrical model for quantifying the effect of a smooth plane wall on a partially ordered packing of beads.*

*MOTS-CLÉS : effet d'une paroi plane, empilement, compacité, modèle d'empilement compressible 4-paramètres.*

*KEYWORDS: plane wall effect, packing, packing density, 4-parameter compressible packing model.*

---

## 1. Introduction.

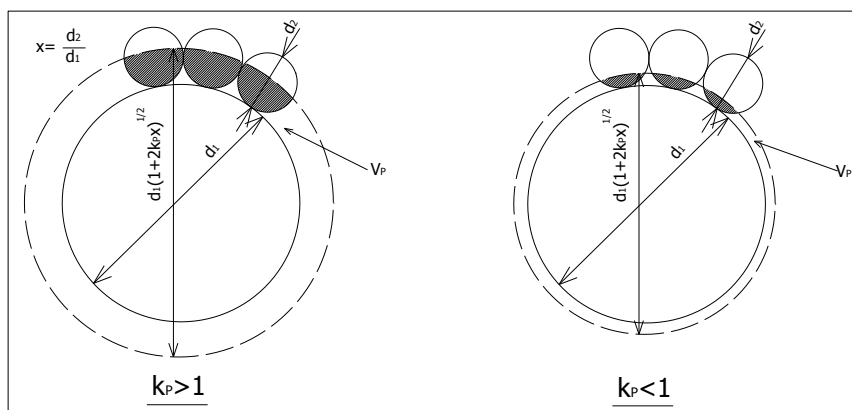
L'empilement d'un matériau granulaire est perturbé par les parois qui l'entourent et qui modifient localement son arrangement: dans des coffrages ou des silos ou bien encore sur des convoyeurs. Ce confinement joue un rôle crucial sur la structure du matériau ou sur sa dynamique. De nombreuses études ont mis en avant cette influence considérable. Elles traitent notamment de la mécanique, de la stabilité, de la compaction des empilements granulaires et de leur écoulement en présence de parois: [BEN 70], [LAN 03], [SUZ 08], [CAM 12]. Dans cet article, l'objectif consiste à proposer un modèle permettant de calculer la compacité à proximité d'une paroi plane, localement moins élevée que dans le cœur de l'empilement. Il est élaboré à partir d'un modèle d'effet de paroi validé entre particules sphériques [ROQ 16]. Celui-ci a été établi dans le cadre de la mise au point d'un Modèle d'Empilement Compressible (MEC) permettant de prédire la compacité de mélanges binaires: le MEC 4-paramètres. En effet, quantifier l'effet de paroi se manifestant contre une paroi plane ayant un rayon de courbure tendant vers l'infini ne constitue finalement que le cas limite de celui se produisant contre la paroi d'une particule sphérique de rayon de courbure fini.

## 2. Type d'empilement considéré: l'empilement partiellement ordonné.

En théorie, la compacité d'un mélange augmente par diminution de l'énergie potentielle globale, son minimum devant correspondre à un empilement cristallin. Ainsi, dans le cas de particules sphériques lisses de même diamètre, les organisations les plus régulières connues sont celles à maille hexagonale ou cubique à faces centrées de compacité 0,74. Dans la réalité, des secousses imprimées à un récipient contenant des billes déversées sans précaution ne permettent pas de dépasser une compacité critique de l'ordre de 0,64. Il s'agit de l'état *aléatoire le plus dense* ou *random close packing (RCP)*. Cependant, Pouliquen *et al.* [POU 97] ont montré qu'une méthode de compaction basée sur des vibrations horizontales appliquées à un récipient recevant des billes à faible débit permettait de réaliser des empilements plus ordonnés et d'évoluer vers un état cristallin. Notre étude se situe dans ce cadre de référence avec des empilements *partiellement ordonnés* de compacité comprise entre une valeur légèrement supérieure à 0,64 et une autre légèrement inférieure à 0,74 dans le cas d'une taille unique de particules.

### 3. Modélisation de l'effet de paroi dans le cas de mélanges binaires de particules sphériques.

Plusieurs auteurs, dont Benenati et Brosilow [BEN 62], ont porté leurs efforts sur la variation locale de compacité de billes de taille unique au voisinage d'une paroi rectiligne. Elle est minimale au contact de cette dernière puis passe par un maximum à une distance située à environ  $d/2$  de la paroi,  $d$  représentant le diamètre des billes. Elle subit ensuite une variation amortie avant de se stabiliser à une distance de la paroi de l'ordre de  $4d$  à  $5d$ . Inspiré par [BEN 62], Ben Aïm [BEN 70] considère que l'effet de paroi est presque totalement localisé dans une couche adjacente à la paroi dont l'épaisseur est de l'ordre de  $d/2$ . Il généralise ensuite ce raisonnement à une paroi courbe. Soient  $d_1$  et  $d_2$  les diamètres des particules sphériques des classes 1 et 2 et  $x$  le rapport  $d_2/d_1$  avec  $d_1 \geq d_2$ . Selon Ben Aïm, en plongeant une bille de diamètre  $d_1$  dans un lit de billes de diamètre  $d_2$ , la perturbation liée à l'effet de paroi est délimitée à l'intérieur de la couronne sphérique comprise entre la bille de diamètre  $d_1$  et celle de diamètre  $d_1 \sqrt{1+2x}$  dont le contour est choisi pour passer par les points de contact entre chaque petite bille plaquée contre la paroi d'une grosse. Cette façon de procéder ne permet cependant pas de respecter une condition aux limites inhérente aux modèles d'empilement: le coefficient d'effet de paroi qui y figure doit être égal à l'unité lorsque toutes les billes deviennent identiques, c'est à dire lorsque  $d_2 = d_1$ . C'est pourquoi nous avons choisi de proposer une adaptation de la cellule de référence de Ben Aïm dans un nouveau Modèle d'Empilement Compressible : le MEC 4-paramètres.



**Figure 1.** Délimitation de la cellule de référence permettant l'étude de l'effet de paroi ( $V_p$  : volume perturbé par l'effet de paroi).

Le diamètre de la sphère délimitant la zone perturbée par l'effet de paroi autour d'une grosse bille est :

$$d_{hyp} = d_1 \sqrt{1 + 2 k_p x} \quad [1]$$

Le nombre de petites billes contre une grosse est calculé à partir de la théorie des carrés sphériques (théorie CS non présentée dans cet article). Celle-ci a été développée dans le cadre des empilements partiellement ordonnés présentant un ordre à longue distance:

$$N_{12,CS}^{dense}(x) = \frac{\pi(1+x)}{x \arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right)} \quad [2]$$

La compacité  $\beta'_2$  des petites particules dans la zone perturbée par l'effet de paroi en est déduite :

$$\beta'_2(x) = \frac{\pi(1+x)}{4x \left( (1+2k_p x)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right)} \cdot \left( 2(1+2k_p x)^{\frac{3}{2}} - 3(1+2k_p x) \left( 1 + \frac{k_p x}{1+x} \right) + \left( 1 + \frac{k_p x}{1+x} \right)^3 - x^3 + \frac{3k_p x^3}{1+x} + x^3 \left( 1 - \frac{k_p}{1+x} \right)^3 \right) \quad [3]$$

Soit  $\beta_2$  la compacité propre de la classe fine. Il reste à déterminer  $k_p$  en respectant la condition aux limites exprimant que le coefficient d'effet de paroi vaut 1 lorsque  $d_2 = d_1$  ce qui conduit à la résolution numérique, à l'aide d'un tableur, ou analytique de l'équation suivante :

$$(\beta_2 - 6)(1 + 2k_p)^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}k_p^2 + 18k_p + 5 = 0 \quad [4]$$

L'équation à résoudre étant du 3<sup>ème</sup> degré, on conserve la valeur de  $k_p$  cohérente avec celles figurant dans le tableau 1.

#### 4. Effet d'une paroi plane sur un empilement partiellement ordonné de sphères de même taille.

Dans le cas d'une paroi plane, on montre, en considérant  $d_2 \ll d_1$ , que l'épaisseur du volume perturbé  $V_p$  vaut:

$$\frac{k_p d_2}{2} \quad [5]$$

Soit  $k_w$  le rapport des compacités en zone perturbée et en zone courante:  $k_w = \beta'_2 / \beta_2$ . Toujours pour une paroi plane, il vient:

$$k_w = \frac{\pi}{4\beta_2} k_p \left(1 - \frac{k_p}{3}\right) \quad [6]$$

Les valeurs de  $k_w$  en fonction de la compacité en zone courante  $\beta_2$  des particules sphériques de taille unique valent:

$\beta_2$	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,734
$k_p$	0,4466	0,5854	0,6729	0,7543	0,8369	0,9253	1,0252	1,1476	1,3284	1,4729
$k_w$	0,4593	0,5607	0,6119	0,6522	0,6869	0,7180	0,7465	0,7730	0,7964	0,8023

**Tableau 1.** Valeurs de  $k_p$  et de  $k_w$  en fonction de  $\beta_2$ .

Pour valider notre modèle, nous allons reprendre le principe de l'expérience réalisée par simulation numérique par Camenen, Descantes et Richard [CAM 12]. Un empilement de particules sphériques d'une seule taille est confiné entre deux parois plates et parallèles séparées par une distance  $W$ . Ils considèrent alors qu'un tel système confiné est constitué d'une part d'une zone perturbée d'épaisseur  $h$  contre chacune des deux parois avec une compacité que nous appellerons  $\beta'_2$  et d'autre part d'une zone centrale d'épaisseur  $W - 2h$  de compacité  $\beta_2$ . Ils expriment ensuite la compacité moyenne des particules sphériques d'une seule taille entre les deux parois sous la forme:

$$\bar{\beta}_2 = \frac{(W - 2h)}{W} \beta_2 + \frac{2h}{W} \beta'_2 \quad [7]$$

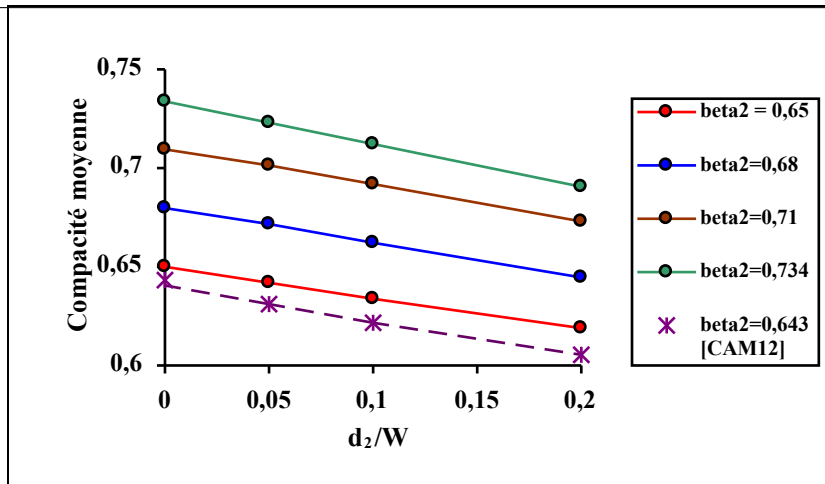
Reprenons cette expression en remplaçant  $h$  par  $k_p d_2 / 2$  (formule [5]) et  $\beta'_2$  par  $k_w \beta_2$  :

$$\bar{\beta}_2 = \beta_2 \left(1 - k_p \left(1 - k_w\right) \frac{d_2}{W}\right) \quad [8]$$

Sachant que  $k_w$  a été exprimé en fonction de  $k_p$  dans la formule [6], nous obtenons finalement:

$$\bar{\beta}_2 = \beta_2 \left(1 - k_p \left(1 - \frac{\pi k_p}{4\beta_2} \left(1 - \frac{k_p}{3}\right)\right) \frac{d_2}{W}\right) \quad [9]$$

La représentation de  $\bar{\beta}_2$  en fonction du rapport  $d_2/W$  est fournie Figure 2.



**Figure 2.** En traits continus, représentation de la compacité moyenne  $\bar{\beta}_2$  obtenue par l'équation [9] en fonction de  $d_2/W$  pour des particules sphériques de taille  $d_2$  mises en place entre deux parois plates et parallèles séparées d'une distance  $W$ . En traits discontinus, simulation numérique de [CAM 12].

En l'absence de données expérimentales concernant l'effet d'une paroi plane sur des empilements partiellement ordonnés, nous avons comparé les prédictions de l'équation [9] (traits continus Figure 2) avec les résultats obtenus par [CAM 12] (trait discontinu) sur des empilements aléatoires denses. En fonction de la valeur de  $\beta_2$  considérée, les pentes représentatives de la décroissance de la compacité moyenne  $\bar{\beta}_2$  en fonction du rapport  $d_2/W$  sont tantôt légèrement plus importantes, tantôt légèrement moins importantes, que celle résultant de la simulation numérique [CAM 12]. Mais l'écart reste relativement faible.

## 5. Conclusion.

Le modèle élaboré à l'origine pour étudier l'effet de paroi exercé par une bille de diamètre  $d_1$  entourée de billes de diamètre  $d_2 < d_1$  dans le cas d'empilements partiellement ordonnés semble également convenir vis-à-vis d'une paroi plane. Dans le Modèle d'Empilement Compressible 4-paramètres, le volume extérieur de la zone perturbée par l'effet de paroi est choisi de manière à respecter une condition aux limites dans le cas extrême  $d_2 = d_1$ . Il était donc louable d'avoir des doutes quant à son efficacité dans un autre cas extrême, celui où  $d_2 \ll d_1$ , correspondant à celui d'une paroi plane. Même si la comparaison avec des données expérimentales reste difficile en raison de leur rareté, les premières vérifications semblent prometteuses.

## 6. Bibliographie.

- [BEN 70] BEN AIM R., Etude de la texture des empilements de grains. Application à la détermination de la perméabilité des mélanges binaires en régime moléculaire, intermédiaire, laminaire, Thèse soutenue à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy, 1970.
- [BEN 62] BENENATI R.F., BROSILOW C.B., « Void fraction distribution in beds of spheres ». *AIChE Journal*, vol. 8, n° 3, 1962, p. 359-361.
- [CAM 12] CAMENEN J-F., DESCANTES Y., RICHARD P., « Effect of confinement on dense packings of rigid frictionless spheres and polyhedra ». *Physical Review E*, vol. 86, n° 6, 2012, p. 061317.
- [LAN 03] LANDRY J.W., GREST G.S., SILBERT L.E. PLIMPTON S.J., « Confined granular packings: Structure, stress, and forces », *Physical Review E*, vol. 67, n°4, 2003, p. 041303.
- [POU 97] POULIQUEN O., NICOLAS M., WEIDMAN P.D., « Crystallization of non-Brownian Spheres under Horizontal Shaking ». *Physical Review Letters*, vol. 79, n° 19, 1997, p. 3640-3643.
- [ROQ 16] ROQUIER G., « The 4-parameter Compressible Packing Model (CPM) including a new theory about wall effect and loosening effect for spheres », *Powder Technology*, vol. 302, 2016, p. 247-253.
- [SUZ 08] SUZUKI M., SHINMURA T. IIMURA K., HIROTA M., « Study of the Wall Effect on Particle Packing Structure Using X-ray Micro Computed Tomography », *Advanced Powder Technology*, vol. 19, 2008, p. 183-195.