

# Etude de la déformée hors-plan d'une membrane microstructurée par une approche discrète et non-locale

Hérisson B.<sup>1</sup>, Challamel N.<sup>2</sup>, Picandet V.<sup>3</sup>, Perrot A.<sup>4</sup> and Wang C.M.<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Université de Bretagne Sud, FRE CNRS 3744 IRDL, Centre de Recherche, Rue de Saint Maudé, BP 92116, 56321 Lorient, E-mail : benjamin.herisson@univ-ubs.fr

<sup>2</sup> Université de Bretagne Sud, FRE CNRS 3744 IRDL, Centre de Recherche, Rue de Saint Maudé, BP 92116, 56321 Lorient, E-mail : noel.challamel@univ-ubs.fr

<sup>3</sup> Université de Bretagne Sud, FRE CNRS 3744 IRDL, Centre de Recherche, Rue de Saint Maudé, BP 92116, 56321 Lorient, E-mail : vincent.picandet@univ-ubs.fr

<sup>4</sup> Université de Bretagne Sud, FRE CNRS 3744 IRDL, Centre de Recherche, Rue de Saint Maudé, BP 92116, 56321 Lorient, E-mail : arnaud.perrot@univ-ubs.fr

<sup>5</sup> School of Civil Engineering, University of Queensland, St Lucia, Queensland 4072, Australia, E-mail: cm.wang@uq.edu.au

*In this paper, the static behavior of a finite microstructured rectangular membrane is studied. The microstructured membrane model comprises a given number of elastic springs in both directions forming a rectangular lattice membrane. We consider the out-of-plane displacement of each node of this two-dimensional lattice. The rectangular lattice membrane is fixed at its boundary. A nonlocal continuous membrane model is developed to approximate the behavior of the finite lattice model. A continualization procedure is applied to the discrete equations where the difference operators are approximated by differential operators. The resulting nonlocal continuum is governed by some length scales in each direction that depend on the size of the microstructure. A comparison of both discrete (the reference lattice model) and continualized nonlocal responses brings out the effectiveness of this micromechanics-based approach.*

*Dans cet article, nous étudions le comportement d'une membrane rectangulaire microstructurée. Cette dernière est composée d'une succession de ressorts élastiques dans les deux directions qui forment un réseau discret bidimensionnel. Nous nous intéressons au déplacement hors plan de chacun des nœuds de ce réseau, les nœuds de bords étant encastrés. Nous développons un modèle continualisé non-local pour simuler le comportement de cette membrane microstructurée. Par une procédure de continualisation, les équations aux différences à résoudre sont remplacées par des équations différentielles éventuellement d'ordres supérieurs. Le modèle continualisé non-local est paramétré par une longueur caractéristique du système qui dépend de la taille de la microstructure. Une comparaison entre les problèmes discrets et continualisés met en avant l'efficacité du nouveau modèle de membrane non-local continu, basé sur la micro-mécanique, en particulier pour capter les effets d'échelle.*

*Keywords: Membrane ; Continualization ; microstructure ; 2D lattice ; Nonlocal medium*

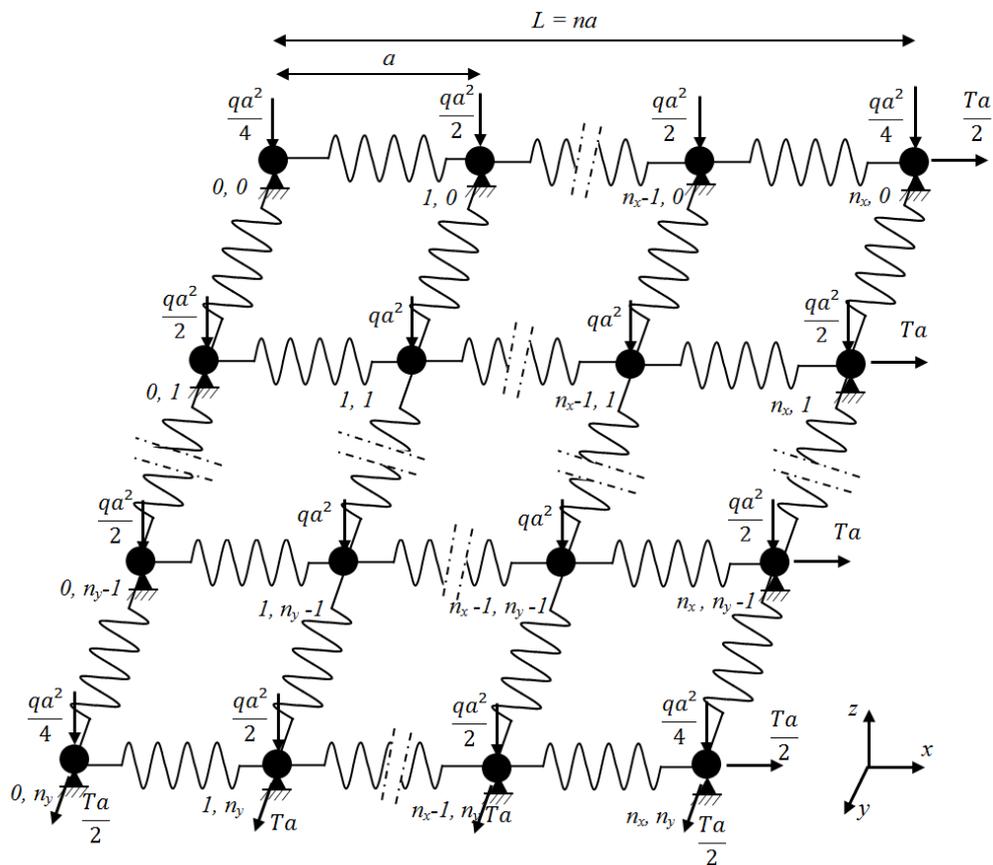
*Mots-clés : Membrane, continualisation ; microstructure ; lattice bidimensionnel ; milieu nonlocal*

# 1. Introduction

43 Le comportement statique d'une membrane microstructurée élastique est ici étudié, à la fois à l'aide d'une  
 44 approche discrète et d'une approche continue non-locale. Cette membrane discrète prend la forme d'un réseau  
 45 constitué de ressorts élastiques connectés dans deux directions, formant une membrane microstructurée  
 46 rectangulaire. Les analyses géométrique et mécanique du problème de la membrane microstructurée sont basées  
 47 sur les travaux de Rosenau [ROS 87] à propos de la vibration transverse d'un réseau bidimensionnel, les  
 48 équations ont toutefois été linéarisées dans notre cas. L'approche que nous adoptons ici afin de faire le lien entre  
 49 la mécanique de la membrane discrète et la mécanique de la membrane continue non-locale est basée sur une  
 50 procédure dite de continualisation, développée par Kruskal et Zabusky [KRU 64]. Elle consiste en un  
 51 développement des opérateurs aux différences finies du réseau en série de Taylor. L'utilisation de l'approximant  
 52 de Padé permet d'éviter des équations différentielles d'ordres supérieurs, comme cela a été fait dans Rosenau  
 53 [ROS 86], Wattis [WAT 00] or Kevrekidis *et al.* [KEV 02]. Nous comparons les modèles local et non-local au  
 54 modèle discret, afin de justifier la source de la non-localité dans cette membrane provenant du caractère discret  
 55 de la matière à petite échelle.

## 2. Comportement de la membrane discrète « lattice »

57 La membrane discrète considérée ici est constituée de masses concentrées sollicitées par une charge verticale  $qa^2$   
 58 dans la direction orthogonale au plan de la membrane. Les nœuds ont un seul degré de liberté dans la direction  
 59 verticale, ce déplacement hors-plan est noté  $w$ . Tous les nœuds de bords sont encastrés. La membrane  
 60 rectangulaire est composée de  $n_x$  ressorts de longueur  $a$  dans la direction  $x$  et  $n_y$  de même longueur dans la  
 61 direction  $y$ . La traction répartie appliquée sur les bords de la membrane est notée  $T$ , voir figure 1. La longueur  
 62 dans chaque direction est notée,  $L_x=L$ ,  $L_y=\lambda L$ , et le nombre d'éléments dans chaque direction,  $n_x=n$ ,  $n_y=\lambda n$ , où  
 63  $\lambda$  est le rapport longueur/largeur.



64

65

Figure 1 – Membrane discrète avec pression uniforme hors-plan.

66

67 La composante verticale de l'effort dans chaque ressort est calculée pour la traction  $T$  comme étant :

$$68 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{i+1/2,j}^x = T \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{a} \\ P_{i,j+1/2}^y = T \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{a} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} P_{i-1/2,j}^x = T \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{a} \\ P_{i,j-1/2}^y = T \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{a} \end{array} \right. \quad (1)$$

69 L'équation d'équilibre à chaque nœud est :

$$70 \quad P_{i+1/2,j}^x - P_{i-1/2,j}^x + P_{i,j+1/2}^y - P_{i,j-1/2}^y = -qa \quad (2)$$

71 Les conditions aux limites d'encastrement de la membrane sont données par :

$$72 \quad w_{0,j} = w_{n_x,j} = 0 \text{ pour } j \in \{0;1\dots;n_y\} \text{ et } w_{i,0} = w_{i,n_y} = 0 \text{ for } i \in \{0;1\dots;n_x\} \quad (3)$$

73 L'adjonction des équations Eq. (1) et Eq. (2) conduit à une équation aux différences linéaire en déplacement,  
74 gouvernant le comportement de la membrane discrète :

$$75 \quad T \left[ \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{a^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{a^2} \right] = -q \quad (4)$$

76 Cette équation est résolue exactement à l'aide des séries de Fourier.

### 77 3. Comportement de la membrane continue non-locale

78 Pour obtenir une approximation non-locale du système discret, nous appliquons une procédure de  
79 continualisation sur les équations discrètes :

$$w_{i+1,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \partial_x^k}{k!} w(x, y) = e^{a\partial_x} w(x, y) \quad (5)$$

80 L'équation aux différences Eq. (4), devient :

$$\frac{-q}{T} = \left[ \frac{4}{a^2} \sinh^2 \left( \frac{a}{2} \partial_x \right) + \frac{4}{a^2} \sinh^2 \left( \frac{a}{2} \partial_y \right) \right] w \quad (6)$$

81 En utilisant l'approximant de Padé pour un développement au second ordre d'Eq. (6), nous obtenons :

$$\frac{-q}{T} = \left[ \frac{\partial_x^2}{1 - \frac{a^2}{12} \partial_x^2} + \frac{\partial_y^2}{1 - \frac{a^2}{12} \partial_y^2} \right] w \quad (7)$$

82 En ignorant les termes d'ordres supérieurs, l'équation de la membrane continualisée non-locale devient :

$$\Delta w - \frac{a^2}{6} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = -\frac{1}{T} \left( 1 - \frac{a^2}{12} \Delta \right) q \quad (8)$$

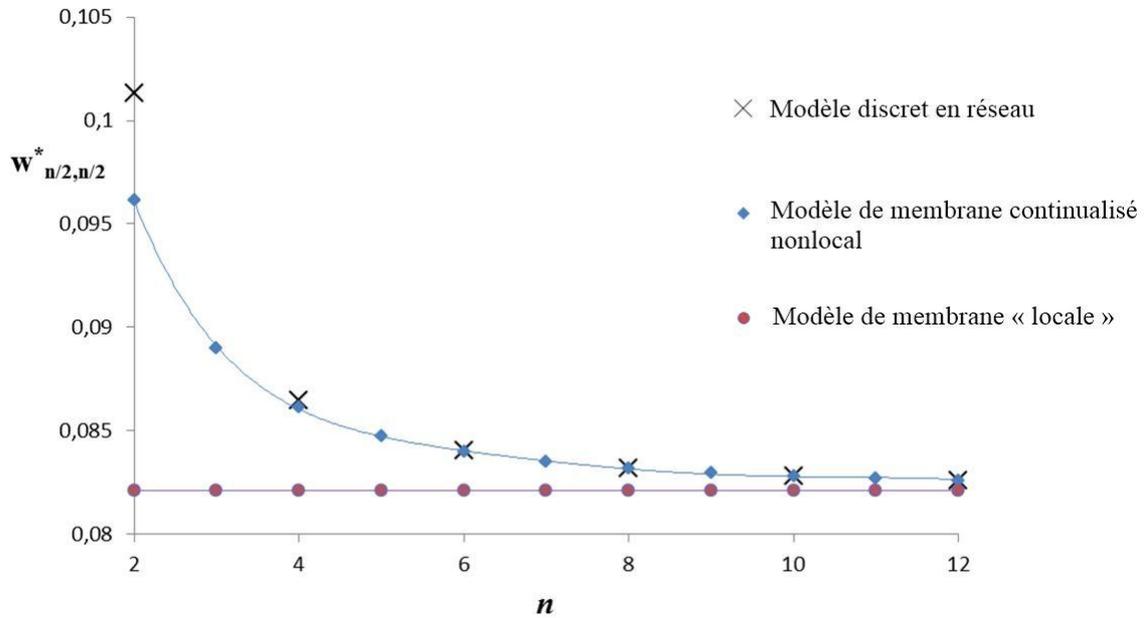
83 Encore une fois, cette équation est résolue exactement avec les séries de Fourier. L'équivalent « locale » de  
84 cette équation est le cas particulier où  $a=0$  et nous obtenons l'équation aux dérivées partielles de type Poisson :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Delta w = -\frac{q}{T} \quad (9)$$

85 C'est une équation aux dérivées partielles linéaire du second-ordre bidimensionnelle qui peut être résolue  
86 numériquement ou exactement. La solution exacte est obtenue à partir des séries de Fourier.

87 La figure 2 présente le déplacement normalisé du point central d'une membrane carrée ( $\lambda=l$ ) pour différentes  
88 valeurs de  $n$ . Pour le cas discret, seules les valeurs paires de  $n$  sont représentées car la membrane n'a pas de point  
AJCE - Special Issue Volume 35 - Issue 1 374

89 central pour les valeurs impaires. La membrane continuallisée non-locale offre de très bon résultats vis-à-vis de la  
90 membrane discrète.



91  
92 **Figure 2 – déplacement normalisé,  $w^*_{n/2, n/2}$ , du point central d’une membrane carrée ( $\lambda=1$ ) pour**  
93 **différentes valeurs de  $n$ .**

## 94 6. Conclusions

95 Cette étude porte sur le déplacement hors plan d’une membrane discrète et de modèles continuallisés  
96 associés. Nos résultats montrent qu’une structure continue non-locale peut se comporter comme une membrane  
97 microstructurée, du fait de la procédure de continuallisation adoptée. Il est important de noter que les solutions  
98 analytiques ont été obtenues et que des simulations numériques du problème discret nous ont permis de  
99 corroborer ces résultats. La taille de la microstructure de la membrane détermine la longueur caractéristique du  
100 modèle non-local égale à  $a^2/12$ , qui est indépendante du chargement et ne dépend que de la taille de la  
101 microstructure. Il pourrait être intéressant de traiter d’autres géométries de microstructure (microstructure à  
102 maille hexagonale par exemple) ou encore d’autres types de conditions limites.

## 103 7. References

- 104  
105 [ROS 87] P. Rosenau, Dynamics of dense lattices, Phys. Rev. B. 36 (1987) 5868–5876.  
106 [KRU 64] M.D. Kruskal, N.J. Zabusky, Stroboscopic-Perturbation Procedure for Treating a Class of  
107 Nonlinear Wave Equations, Journal of Mathematical Physics. 5 (1964) 231.  
108 [ROS 86] P. Rosenau, Dynamics of nonlinear mass-spring chains near the continuum limit, Physics  
109 Letters A. 118 (1986) 222–227.  
110 [WAT 00] J.A.D. Wattis, Quasi-continuum approximations to lattice equations arising from the discrete  
111 nonlinear telegraph equation, Journal of Physics A: Mathematical and General. 33 (2000) 5925–5944.  
112 [KEV 02] P.G. Kevrekidis, I.G. Kevrekidis, A.R. Bishop, E.S. Titi, Continuum approach to discreteness,  
113 Physical Review E. 65 (2002). <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.65.046613> (accessed June 4,  
114 2015).