

Endommagement discret et continu : Application aux matériaux quasi-fragiles

Benjamin Hérisson

Université de Bretagne Sud, FRE CNRS 3744 IRDL, mail : benjamin.herisson@univ-ubs.fr

RÉSUMÉ. Nous avons pu développer des travaux concernant la mécanique de l'endommagement, dont les derniers avancements avaient participé à motiver l'établissement de cette thèse. Nous concentrons cette étude sur une chaîne axiale endommageable inhomogène soumise à un effort de traction uniforme jusqu'à la rupture. Cette chaîne est analysée à la fois en utilisant la Mécanique de l'Endommagement Discret (MED) et la Mécanique de l'Endommagement Continu (MEC). La méthode discrète se base sur un modèle microstructuré composé d'une succession de ressorts élasto-endommageables possédant une limite élastique variable en fonction de leurs positions dans la chaîne. Un modèle MEC non local est développé afin d'analyser le système fini endommageable par un milieu continu équivalent. Une procédure de continualisation est appliquée aux équations aux différences du problème discret, aboutissant à un modèle non local de propagation de l'endommagement. Les conditions aux bords du problème continualisé sont équivalentes à une loi cohésive appliquée à un maillon de taille finie. Les résultats analytiques et numériques montrent la forte proximité des approches discrètes et continues enrichies pour ce problème de barreau inhomogène, ainsi que l'aptitude du modèle d'endommagement non-local, à appréhender les phénomènes de localisation dans les milieux quasi-fragiles hétérogènes.

ABSTRACT. Recent progress in damage mechanics led to the establishment of this thesis. We will focus this paper on the failure of an inhomogeneous axial damage chain under uniform tension. The chain is studied both with discrete damage mechanics (DDM) and Continuum Damage Mechanics (CDM), the first being based on a microstructured model composed of multiples elastic-damage springs whose elastic yield threshold is variable and depend on the position along the chain. We aim to develop a non-local CDM model mathematically equivalent to the finite difference formulation of the DDM system. In order to do this, we rely upon a continualisation procedure applied to the finite difference formulation which gives us a non-local propagating damage model. The boundary conditions of the continualised problem are equivalent to a cohesive law applied to a finite length link. Analytical and numerical results show a strong proximity of the discrete and enriched continuous approaches for this heterogeneous bar problem, as well as the effectiveness of the non-local damage model to apprehend the localization phenomena in heterogeneous quasi-fragile fields.

Mots clés: gradient de résistance; problème discret; modèles continus non-locaux; effet d'échelle; matériau microstructuré; localisation

Key words: strength gradient; discrete problem; non local continuous models; scale effect; microstructured material; localisation

1. Introduction

Dans cet article, le comportement statique d'un système discret endommageable soumis à une traction uniforme est étudié. Le système unidimensionnel est une chaîne axiale composée de ressorts endommageables de résistance non uniforme, qui interagissent localement avec leurs premiers voisins. Il s'agit du problème de réseau de Born-Kármán généralisé en prenant en compte des phénomènes inélastiques de nature endommageable. Cette chaîne endommageable dite microstructurée est d'abord étudiée à l'aide d'une approche discrète (Mécanique de l'endommagement discret MED) puis avec une approche continue équivalente (Mécanique de l'endommagement continu MEC). La loi constitutive élasto-endommageable est une loi avec radoucissement qui conduit à un problème d'évolution mal posé avec une infinité de solutions pour un barreau homogène soumis à de la traction simple. Afin de forcer le phénomène de localisation par un gradient de propriétés de matériau, nous introduisons une hétérogénéité de résistance sous la forme d'un seuil d'élasticité variant en fonction de la position dans la chaîne.

On observe pour ce système discret des effets d'échelles affectant à la fois la rigidité et la résistance dépendant de la taille de la microstructure. Ce type d'effet d'échelle en résistance a été étudié de manière exhaustive par Bažant [BAZ 05]. Le premier modèle phénoménologique d'endommagement non local fut développé dans les années 80 par Pijaudier-Cabot et Bažant [PIJ 87]. La justification micromécanique des modèles d'endommagement non locaux reste aujourd'hui un problème ouvert. Cet article vise à montrer que le caractère discret de la matière à petite échelle pourrait être à l'origine de cette non localité, dans un problème de localisation conditionné par un gradient de résistance.

Nous montrons que les équations du système discret endommageable sont équivalentes à une formulation en différences finies centrée d'un problème d'endommagement continu (CDM). Le cheminement présenté ici est proche de celui déjà publié [CHA 15] pour une chaîne endommageable en flexion et [PIC 16] pour une chaîne endommageable en traction) mais avec une hétérogénéité de résistance des maillons de la chaîne induisant un gradient de résistance au lieu du gradient de contraintes envisagé dans les études précédentes. Les modèles d'endommagement continus non locaux présentés ici sont principalement obtenus par le biais d'une méthode de continualisation appliquée aux équations aux différences non linéaires traduisant le comportement de la chaîne discrète. À l'exception de la loi gouvernant les phénomènes élasto-endommageables au bord modélisée via une loi cohésive de longueur finie (voir [BAZ 76], les phénomènes de propagation de la zone endommageable sont correctement décrits à partir d'une loi endommageable non locale. La condition aux limites « statique » qui en découle est comparée à une condition aux limites plus classique dite « cinématique » qui ne parvient pas à traduire le comportement du système discret sur toute la plage de chargement. Après avoir atteint la charge maximum, dans la branche de radoucissement, le système ne présente plus de propagation de l'endommagement. Le premier ressort, le plus endommagé, est le seul à voir son endommagement encore évoluer jusqu'à rupture.

La longueur caractéristique non locale du système est obtenue analytiquement par le biais de la méthode de continualisation et dépend uniquement de la taille de la microstructure : elle est donc indépendante du chargement. Les équations différentielles d'ordre supérieur obtenues par la méthode de continualisation sont converties en équations différentielles en variables duales, en utilisant l'approximant de Padé. Une solution analytique est ainsi obtenue sans recourir à des conditions aux limites d'ordre supérieur. Le modèle continu non local développé reproduit fidèlement la réponse du modèle discret même dans le cas d'une chaîne possédant un faible nombre de maillons.

2. Discrete Damage Mechanics

Équation d'équilibre

Cette étude porte sur la réponse statique d'un système "lattice" élasto-endommageable unidimensionnel. Ce dernier est composé de n ressorts endommageables formant une chaîne discrète. La longueur initiale de chaque ressort est notée a , et la longueur totale initiale est $L=na$. Le chargement de la chaîne s'effectue au travers d'une unique force F appliquée sur le dernier nœud, ce qui mène à une répartition uniforme de l'effort normal dans la chaîne (voir Figure 1).

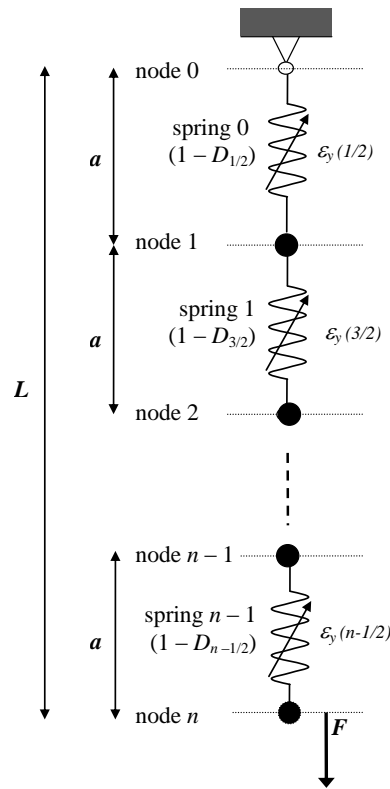


Figure 1 – Chaîne axiale élasto-endommageable sous traction uniforme

L'équation d'équilibre peut s'écrire :

$$N_i = F \quad (1)$$

a. Comportement élasto-endommageable

Chaque cellule se comporte comme un ressort élasto-endommageable :

$$N_i = F = k(1 - D_i)\Delta u_i \quad \text{avec} \quad \Delta u_i = u_{i+1/2} - u_{i-1/2} \quad (2)$$

Où $k = ES/a$ est la rigidité initiale d'un ressort, D_i est la variable d'endommagement du ressort i , variant de 0 pour un ressort non endommagé à 1 pour un ressort brisé. La fonction de charge est définie par :

$$f(\Delta u_i, D_i) = \frac{\Delta u_i}{a\varepsilon_y(i)} - 1 - \alpha D_i \leq 0 \quad (3)$$

Où $\varepsilon_y(i)$ est le seuil de limite élastique le long de la chaîne, qui détermine l'amorçage du phénomène d'endommagement. Le paramètre α contrôle le comportement de la phase d'endommagement de chaque ressort. Pour $\alpha \in [0; 1]$ on n'observe aucun écrouissage dans la phase d'endommagement, avec une réponse plus fragile lorsque α tend vers 0. Pour $\alpha > 1$, un régime d'écrouissage précède le régime de radoucissement avant la rupture. La figure 2 montre les courbes d'effort-déplacement pour un chargement monotone et différentes valeurs du paramètre α .

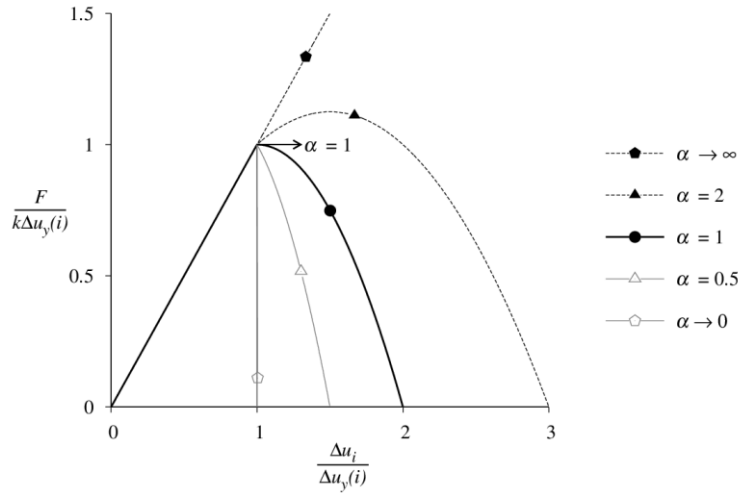


Figure 2 – Comportement du ressort endommageable $\frac{F}{k\Delta u_y(i)} = f\left(\frac{\Delta u_x(i)}{\Delta u_y(i)}\right)$; la phase d'endommagement commence au point $(\Delta u_x, F) = (\Delta u_y(i), k\Delta u_y(i))$

Cette loi d'endommagement effort-déplacement s'exprime à partir d'une fonction de charge d'endommagement de type Marigo [MAR 81] pour un problème continu. Il s'agit aussi d'une généralisation de [PIC 16], avec une résistance inhomogène, pour un problème structural différent. Les conditions de chargement-déchargement (conditions de Kuhn-Tucker) sont définies par:

$$f(\Delta u_x, D_i) \leq 0, \quad \dot{D}_i \geq 0, \quad f(\Delta u_x, D_i) \dot{D}_i = 0 \quad (4)$$

Dans le cas d'un chargement monotone, le critère de charge d'endommagement $f(\Delta u_x, D_i) = 0$ détermine l'évolution de l'endommagement. Cette contrainte de la fonction de charge mène à une égalité entre la variable d'endommagement et le déplacement relatif du maillon considéré :

$$\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a} = \varepsilon_y(i) [1 + \alpha D_i] \quad (5)$$

En introduisant Eq. (2) dans Eq. (1), on identifie explicitement la valeur de l'endommagement dans le $i^{\text{ème}}$ maillon:

$$(1 - D_i)(1 + \alpha D_i) = \frac{F}{EA\varepsilon_y(i)} \quad (6)$$

La déformation élastique $\varepsilon_y(i)$ est choisie de manière variable le long de la chaîne, sous une forme de fonction homographique :

$$\varepsilon_y(i) = \begin{cases} \varepsilon_0 \frac{1}{1 - \gamma \frac{i}{n}} & \text{si } 1 - \gamma \frac{i}{n} > 0 \\ +\infty & \text{si } 1 - \gamma \frac{i}{n} \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } \gamma \in [0; +\infty] \quad (7)$$

Un tel choix de fonction implique que pour des valeurs de γ supérieure à 1, une partie de la chaîne aura un comportement purement élastique. En combinant Eq. (4) et Eq. (5) nous obtenons:

$$(1 - D_i)(1 + \alpha D_i) = \beta \left[1 - \gamma \frac{i}{n} \right] \quad \text{avec } \beta = \frac{F}{EA} \quad (8)$$

Une équation d'endommagement similaire a été obtenue par Challamel et al [CHA 15] ou Picandet et al [PIC 16] pour un réseau avec une résistance homogène, mais en présence d'un gradient de contrainte. L'équation polynomiale du second ordre portant sur l'endommagement fait apparaître deux solutions pour D_i :

$$D_i^\pm = \frac{\alpha-1}{2\alpha} m \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1-\gamma \frac{i}{n}\right)} \quad (9)$$

La plus petite solution est associée à la partie d'écrouissage du système (pour $\alpha > 1$) et est notée D_i^+ , l'autre, D_i^- correspond à la solution de radoucissement. Le terme racine dans cette équation permet de définir deux charges caractéristiques du problème, la charge correspondant au seuil élastique, β_y , et la charge maximale supportée par le système discret, β_{max} . Cette dernière est atteinte au cours de la transition entre le processus d'écrouissage et le processus de radoucissement dans le ressort le plus sollicité (à l'encastrement), i.e. pour $D_{1/2}^+ = D_{1/2}^-$:

$$\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1-\gamma \frac{1}{2n}\right) = 0 \Rightarrow \beta_{max} = \frac{2n}{2n-\gamma} \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha} \quad (10)$$

Il apparaît que la charge maximale dépend du paramètre d'échelle n qui conditionne la taille de la microstructure, ce qui signifie qu'un effet d'échelle en résistance sera présent dans la solution discrète. L'autre charge caractéristique, la charge seuil de limite élastique β_y , est obtenu lorsque l'endommagement du ressort le plus sollicité s'annule, i.e. $D_{1/2}^+ = 0$.

$$\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta_y}{\alpha} \left(1-\gamma \frac{1}{2n}\right) = \left(\frac{\alpha-1}{2\alpha}\right)^2 \Rightarrow \beta_y = \frac{2n}{2n-\gamma} \quad (11)$$

Pour ces deux charges caractéristiques, nous pouvons déterminer les p ressorts endommagés pour la plage de chargement $\beta \in [\beta_y ; \beta_{max}]$ et les $n-p$ ressorts élastiques. Nous calculons la longueur continue d'endommagement, la longueur pour laquelle la chaîne s'endommage à l'échelle du continuum :

$$D_i^+ (ia^* = l_0^*) = 0 \Rightarrow l_0^* = 1 - \frac{\beta_y}{\beta} \quad (12)$$

Naturellement, dans le problème discret considéré, un nombre entier de ressorts est dans un état d'endommagement actif. Ce nombre est calculé à partir de la fonction non régulière de l'état de chargement :

$$p = \left\lfloor n \frac{\beta - \beta_y}{\beta} \right\rfloor + 1 \quad (13)$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière par défaut de x . L'équation en différence finie du premier ordre à résoudre pour les p ressorts endommagés est :

$$\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a\epsilon_0} = \frac{1 + \alpha D_i^+}{1 - \gamma \frac{i}{n}} \text{ avec } D_i^+ = \frac{\alpha-1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1-\gamma \frac{i}{n}\right)} \quad (14)$$

Une méthode itérative peut être utilisée pour résoudre exactement cette équation différentielle du premier ordre en utilisant $u_0 = 0$ comme condition aux limites. Lorsque le chargement atteint $\beta = \beta_{max}$, le régime de radoucissement s'applique au ressort le plus sollicité qui se caractérise par :

$$\frac{u_1}{a\epsilon_y} = 1 + \alpha D_{1/2}^- \text{ avec } D_{1/2}^- = \frac{\alpha-1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1-\frac{1}{2n}\right)} \quad (15)$$

Les $p-1$ ressorts endommagés se déchargent de manière élastique avec la valeur d'endommagement atteinte à β_{max} , tandis que les $n-p$ ressorts non endommagés se déchargent de manière élastique. Dans le domaine élastique, l'endommagement s'annule $D_i = 0$. Pour cette partie de la chaîne, il est possible d'avoir une solution exacte triviale du système élastique discret. Dans ce cas, Eq. (2) devient $N_i = F = k\Delta u_i$, ce qui, avec les paramètres adimensionnels précisés auparavant, nous permet d'obtenir la solution de cette équation linéaire en différence finie :

$$u_i^* = \beta \frac{i}{n} + A \quad (16)$$

La constante d'intégration A est déterminée en utilisant la continuité du déplacement à la jonction de la zone élastique et élasto-endommageable. Dans la plage de chargement $\beta \in [0 ; \beta_y]$, le comportement de la chaîne est purement élastique, nous utilisons alors la condition $u_0 = 0$. Ce qui donne $A = 0$ pour ce cas précis.

Les Figure 3 et Figure 4 montrent les résultats issus de l'approche numérique itérative (exacte) des deux processus d'endommagement, en présentant le déplacement adimensionnalisé du dernier nœud de la chaîne par rapport au facteur de charge β . Plus précisément, la Figure 4 représente l'effet du paramètre α sur le comportement de la chaîne pour un nombre fixe de ressorts ($n = 4$) ; il est clair que α influence fortement le processus d'écrouissage et la valeur de charge maximale. La Figure 5 adopte le point de vue opposé, avec un paramètre d'écrouissage fixe $\alpha=4$ et différentes valeurs de n . Cette fois, nous pouvons voir que la taille de la microstructure influence fortement le comportement en radoucissement de la chaîne ainsi que la charge maximale, plus encore que dans de précédents travaux [HER 16].

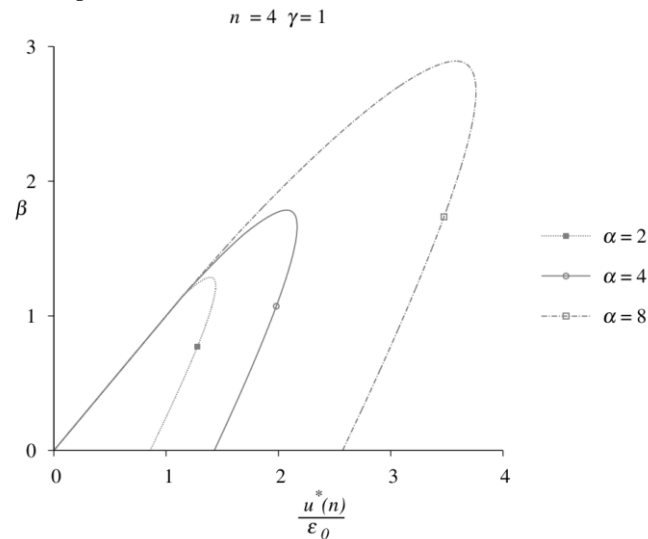


Figure 3 – Déplacement adimensionnel de l'extrémité de la chaîne en fonction du chargement, avec $n = 4$ et différentes valeurs du paramètre α .

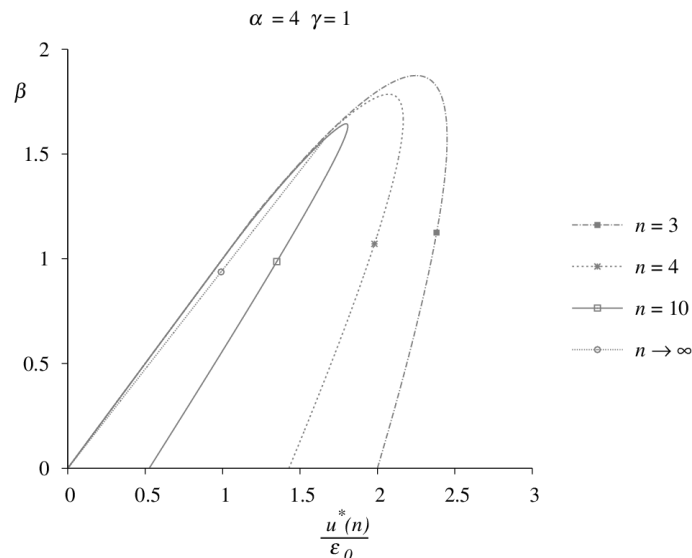


Figure 4 – déplacement adimensionnel de l'extrémité de la chaîne en fonction du chargement, avec $\alpha = 4$ et différentes valeurs du paramètre n .

3. Continualisation

a. Méthodologie

Un modèle d'endommagement continu non local est développé à partir des équations discrètes d'endommagement à l'aide d'une procédure de continualisation, basée sur un développement asymptotique des opérateurs aux différences :

$$u(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \partial_x^k}{k!} u(x) = e^{a\partial_x} u(x) \quad (17)$$

Dans le cas de l'écrouissage, pour $x^* \in [0; l_0^*]$, en combinant Eq. (18) avec Eq. (14), nous obtenons :

$$\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a} = \frac{2}{a} \sinh\left(\frac{a\partial_x}{2}\right) u = \partial_x \left(1 + \frac{a^2}{24} \partial_x^2 + o(a^4)\right) u \quad (18)$$

où $\partial_x = \partial/\partial x$ est le différentiel spatial. Le modèle continué au gradient est alors obtenu par :

$$u' + \frac{a^2}{24} u''' = \varepsilon_0 \frac{1 + \alpha D(x^*)}{1 - \gamma x^*} \quad \text{avec} \quad x^* = \frac{x}{L} \quad (19)$$

Il est possible d'obtenir un développement rationalisé d'Eq. (20) en utilisant l'approximant de Padé :

$$\partial_x \left(1 + \frac{a^2}{24} \partial_x^2\right) = \frac{\partial_x}{1 - \frac{a^2}{24} \partial_x^2} + \dots \quad (20)$$

La longueur caractéristique au carré obtenu, $a^2/24$, est similaire à celle obtenue par Bažant [BAZ 84], dans son modèle unidimensionnel imbriqué.

b. Modèles non locaux

A partir d'Eq. (20) et Eq. (21) nous pouvons exprimer la fonction de charge d'endommagement continué sous forme non locale :

$$u' = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{a^2}{24} \partial_x^2\right] \left[\frac{1 + \alpha D(x^*)}{1 - \gamma x^*}\right] \quad \text{avec} \quad D^\pm(x^*) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} m \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}(1 - \gamma x^*)} \quad (21)$$

Deux modèles non locaux seront utilisés pour obtenir une réponse globale continué non local. Le premier, un modèle non local de propagation d'endommagement est utilisé pour déterminer la solution de la branche d'écrouissage pour chaque ressort endommagé pour les nœuds intérieurs. Ce modèle est défini comme suit :

$$\begin{cases} \frac{N}{1-D} - \frac{a^2}{24} \left(\frac{N}{1-D}\right)'' = EA\varepsilon \\ f(\varepsilon, D) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left[1 - \frac{a^2}{24} \partial_x^2\right] \left[\frac{1 + \alpha D}{1 - \gamma x^*}\right] \leq 0 \\ f(\varepsilon, D) \leq 0, \quad \mathcal{B} \geq 0, \quad f(\varepsilon, D) \mathcal{B} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Le second est nécessaire pour déterminer la solution du déplacement du premier nœud endommagé, dans les processus d'écrouissage ainsi que de radoucissement. Nous devons utiliser une loi cohésive de longueur finie qui s'exprime par :

$$\begin{cases} N = EA(1-D) \frac{[\Delta u]}{a} \\ f([\Delta u], D_i) = \frac{[\Delta u]}{a\varepsilon_y(a/2)} - 1 - \alpha D \leq 0 \\ f([\Delta u], D) \leq 0, \quad \mathcal{B} \geq 0, \quad f([\Delta u], D) \mathcal{B} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \Delta u = u(x+a/2) - u(x-a/2) \quad (23)$$

La loi cohésive décrite en Eq. (25) est appliquée en condition aux limites extrémales, tandis que le modèle décrit en Eq. (24) s'appliquera au comportement du reste de la zone endommagée. L'utilisation de la loi cohésive peut être interprétée comme une nouvelle condition aux limites dite « statique » qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{u\left(\frac{1}{n}\right)}{a\varepsilon_y} = \frac{1 + \alpha D^+\left(\frac{1}{2n}\right)}{1 - \frac{\gamma}{2n}} \quad \text{avec} \quad D^+\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}\left(1 - \frac{\gamma}{2n}\right)} \quad (24)$$

Eq. (23) est alors résolue en utilisant cette condition aux limites. À des fins de comparaison nous avons aussi résolu Eq. (23) en utilisant directement la condition aux limites cinématique, $u(0)=0$, et donc sans appliquer la loi cohésive.

c. Comportement en radoucissement

Une fois la charge maximale atteinte, $\beta \rightarrow \beta_{\max}$, la longueur correspondant au premier ressort entre dans un processus de radoucissement. Nous avons alors une chaîne qui peut être découpée en trois parties, la première partie étant $x^* \in [0; 1/n]$, où la loi cohésive s'applique en radoucissement. La seconde partie représentant la zone précédemment endommagée qui subit une décharge élastique, $x^* \in [1/n; l_{0,\max}^*]$ avec $l_{0,\max}^* = 1 - \beta_y / \beta_{\max}$. L'endommagement de cette partie de la chaîne reste à sa valeur maximale, D_{\max} , atteinte à β_{\max} . Et enfin, la partie non endommagée qui se décharge elle aussi élastiquement, $x^* \in [l_{0,\max}^*; 1]$. La partie en décharge élastique préendommagée est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$ESu' = \frac{N}{1-D_{\max}} - \frac{a^2}{24} \left(\frac{N}{1-D_{\max}} \right)'' \text{ avec } D_{\max}^+ = \frac{\alpha-1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta_{\max}}{\alpha} (1-\gamma x^*)} \quad (25)$$

Eq. (28) peut être réécrite sous la forme :

$$u'(x) = \beta \frac{1}{1-D_{\max}^+} - \beta \frac{a^2}{24} \left(\frac{1}{1-D_{\max}^+} \right)'' \quad (26)$$

Dans le régime radoucissant, il n'y a plus de propagation de l'endommagement. Seul le premier ressort subit encore un processus d'endommagement actif. Pour intégrer Eq. (23), nous utilisons de nouveau la loi cohésive qui est l'équivalent radoucissant d'Eq.(26) qui donne la condition aux limites suivante :

$$\frac{u\left(\frac{1}{n}\right)}{a\varepsilon_y} = \frac{1 + \alpha D^-\left(\frac{1}{2n}\right)}{1 - \frac{\gamma}{2n}} \text{ avec } D^-\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{\alpha-1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{\gamma}{2n} \right)} \quad (27)$$

d. Condition de continuité à l'interface endommagée élastique

Pour la plage $x \in [l_0; L]$, nous avons un comportement élastique de la chaîne, pour obtenir le déplacement en bout de chaîne, la continuité du déplacement à l'interface $u^+(l_0^*) = u^*(l_0^*)$ est utilisée. Combiné à l'équivalent continu d'Eq. (17), nous obtenons :

$$\frac{u^+(x^*)}{\varepsilon_y} = \frac{u^*(l_0^*)}{\varepsilon_y} + \beta(x^* - l_0^*) \quad (28)$$

Le déplacement de l'extrémité libre de la chaîne est obtenu par Eq. (31) avec $x^*=1$. Dans la branche de radoucissement, Eq. (31) ne dépend plus de l_0^* mais de $l_{0,\max}^*$. La Figure 5 montre que l'utilisation de la condition aux limites "statique" mène à une meilleure approximation du problème discret que l'utilisation du modèle de propagation de l'endommagement couplée à une condition « cinématique », qui ne permet pas d'atteindre la charge maximum. En effet ce dernier n'admet une solution que jusqu'à la charge limite du problème local. La condition « statique » permet d'atteindre la charge maximum sans perte significative de précision par rapport au système discret. La réponse continuallisée non locale affichant une erreur de 0,05% au maximum par rapport à la réponse discrète, les deux courbes ne peuvent être distinguées à l'échelle de la figure. Le modèle local est aussi représenté en Figure 5, où l'on peut observer le paradoxe de Wood à la rupture (phénomène de longueur de dissipation nulle).

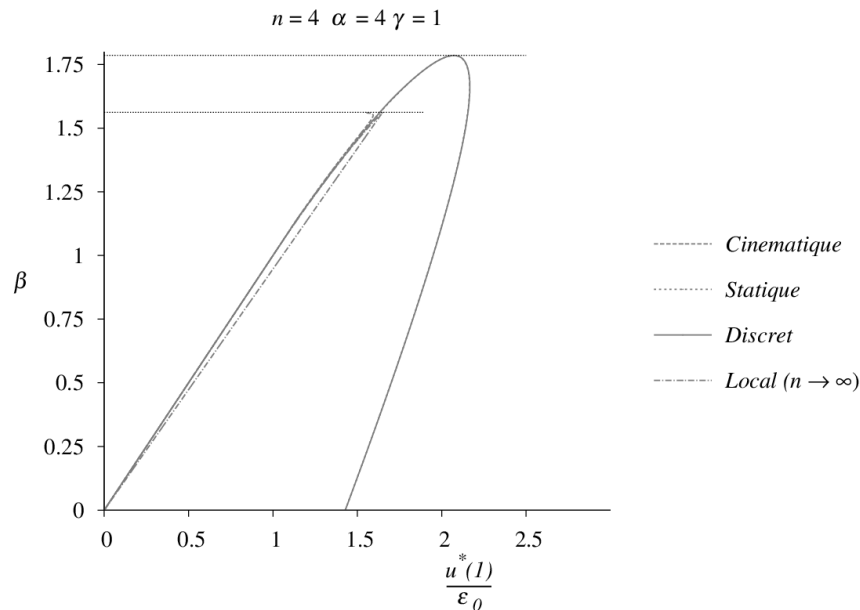


Figure 5 – Déplacement adimensionnel de l'extrémité de la chaîne en fonction du chargement, comparaison du modèle discret avec les modèles continualisés non locaux et le modèle continu local.

4. Conclusion

Dans cet article, la localisation d'un barreau microstructuré élasto-endommageable avec résistance inhomogène a été étudiée. Le problème d'évolution jusqu'à la rupture est traité avec une approche d'endommagement discret et d'endommagement continu nonlocal. Du fait de la traction uniforme dans le système, la localisation est induite par une hétérogénéité de résistance des maillons de la chaîne. L'approximation non locale est construite à l'aide d'une procédure de continualisation dont la réponse macroscopique est très proche de celle du système discret. La longueur caractéristique de ce modèle est constante et indépendante du chargement, d'une valeur de $\sqrt{a^2/24}$.

En suivant cette méthodologie de continualisation, nous observons que la non-localité apparaît à la fois dans la fonction de charge et dans la loi constitutive. Cela débouche sur la formulation d'un modèle non local couplé, dont les bases reposent sur le caractère discret de la matière à petite échelle. L'échelle de la microstructure influence à la fois la réponse en écrouissage et en radoucissement, cette dernière étant beaucoup plus sensible. Cela confirme la nécessité d'une loi cohésive pour ce type de système quasi-fragile. Avec le gradient de résistance choisi, nous observons un effet d'échelle en résistance sur le système, effet plus marqué pour des tailles de microstructure plus significatives.

5. Bibliographie

- [BAZ 05] Z.P. Bazant, *Scaling of Structural Strength*, Butterworth-Heinemann, 2005.
- [PIJ 87] G. Pijaudier-Cabot, Z. Bažant, Nonlocal Damage Theory, *Journal of Engineering Mechanics*. 113 (1987) 1512–1533.
- [CHA 15] N. Challamel, V. Picandet, G. Pijaudier-Cabot, From discrete to nonlocal continuum damage mechanics: Analysis of a lattice system in bending using a continualized approach, *International Journal of Damage Mechanics*. 24 (2015) 983–1012.
- [PIC 16] V. Picandet, B. Hérisson, N. Challamel, A. Perrot, On the failure of a discrete axial chain using a continualized nonlocal Continuum Damage Mechanics approach, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*. 40 (2016) 436–466. doi:10.1002/nag.2412.
- [BAZ 76] Z.P. Bazant, Instability, Ductility, and Size Effect in Strain-Softening Concrete, *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 102 (1976) 331–344.
- [MAR 81] J.J. Marigo, Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique, *CR Acad. Sci. Paris II*. 292 (1981) 1309–1312.
- [HER 16] B. Hérisson, V. Picandet, N. Challamel, A. Perrot, Scale effects in the static response of a one-dimensional quasi-brittle damage lattice, *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. 0 (2016) 1–16.
- [BAZ 84] Z.P. Bažant, Imbricate Continuum and its Variational Derivation, *Journal of Engineering Mechanics*. 110 (1984) 1693–1712.