

Analyse de comportement des plaques sandwiches en FGM

Lazreg Hadji¹, Nafissa Zouatnia², Latifa Ould Larbi³

¹ Département de Génie Civil, Université Ibn Khaldoun, BP 78 Zaaroura, 14000 Tiaret, Algérie, had_laz@yahoo.fr

² Laboratoire de Structures, Géotechnique et Risques, Université Hassiba Benbouali de Chlef, BP 151, Hay Essalam, UHB Chlef, Chlef (02000), Algérie, nissa.hadji@yahoo.com

³ Université Hassiba Benbouali de Chlef, BP 151, Hay Essalam, UHB Chlef, Chlef (02000), Algérie, latifaouldlarbi@gmail.com

RÉSUMÉ. Ce travail présente une étude dynamique des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriété type FGM en utilisant une nouvelle théorie de cisaillement transverse d'ordre élevé à quatre variables. Les équations du mouvement sont obtenues en appliquant le principe d'Hamilton. Les fréquences de vibration sont trouvées par la résolution du problème aux valeurs propres. La théorie proposée est efficace dans la résolution du comportement dynamique des plaques sandwiches à gradient de propriété type FGM.

MOTS-CLÉS : Sandwich, FGM, Vibration, Solution de Navier.

ABSTRACT. This article uses the four-variable refined plate theory (RPT) for the free vibration analysis of functionally graded material (FGM) sandwich rectangular plates. The equation of motion for the FGM sandwich plates is obtained based on Hamilton's principle. The fundamental frequencies are found by solving the eigenvalue problems. The proposed theory is accurate and simple in solving the free vibration behavior of the FGM sandwich plates.

KEY WORDS: Sandwich, FGM, Vibration, Navier solution

1. Introduction

La construction sandwich a été développée et utilisée depuis 50 ans à cause de sa grande rigidité en flexion, de faible poids spécifique, et des bonnes qualités d'isolation. Les structures sandwiches représentent une forme spéciale d'une structure en couches qui se composent de deux peux minces à rigidité et résistance élevées, et cœur de matériau souple, de poids léger relativement épaisse. En raison de la large application du FGM, plusieurs études ont été effectuées pour analyser les comportements des structures FGM. Dans Ce travail porte sur la vibration des plaques sandwiches à gradient de propriété type FGM en utilisant une nouvelle théorie raffinée des plaques RPT à quatre variables.

1.1. Configuration géométrique

La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques, nommées, Couche 1, Couche 2, et Couche 3 de la face inférieure à celle supérieure de la plaque. respectivement. Le rapport d'épaisseur dans chaque couche du bas en haut est dénoté brièvement par les combinaisons de trois chiffres "1-0-1", "2-1-2" comme il est montré en figure. 1.



Figure 1. Géométrie de la plaque sandwich rectangulaire FGM.

1.2. Propriétés matérielles

Les propriétés du FGM varient continuellement due au changement gradué de la fraction volumique des matériaux constitutifs (céramique et métal), généralement dans le sens de l'épaisseur. La fonction de loi de puissance est couramment utilisée pour décrire ces variations des propriétés des matériaux. La fraction volumique du FGM est supposé varier suivant l'épaisseur de la plaque selon une fonction simple en loi de puissance :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k \quad z \in [h_1, h_2] \quad [1a]$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad [1b]$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k \quad z \in [h_3, h_4] \quad [1c]$$

Où, $V^{(n)}$, ($n=1,2,3$) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche n ; k est l'indice de puissance qui décrit le profil de variation des matériaux suivant l'épaisseur.

Les propriétés matérielles effectives, comme le module de Young E , coefficient de Poisson ν , et la densité de masse ρ , peuvent être exprimée par une loi de mélange comme :

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V^{(n)} \quad [2]$$

1.3. Cinématique et Équations Constitutives

Le champ de déplacement utilisé dans cette étude est le suivant :

$$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad [3]$$

$$W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y).$$

Où $f(z)$ représente la fonction de distribution des contraintes de cisaillement qui est sous la forme :

$$f = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z \left(\frac{z}{h} \right)^2 \quad [4]$$

Pour les FGMs élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad [5]$$

Les coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}, \quad [6a]$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2}, \quad [6b]$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}, \quad [6c]$$

1.4. Equations gouvernantes

Les équations de mouvement de la plaque FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton. Le principe sous la forme analytique suivante :

$$0 = \int_0^t \delta (U_e - T) dt \tag{7}$$

Où δU et δT représentent les variations des énergies de déformation et la variation de l'énergie cinétique respectivement. Les équations de mouvement pour la plaque sandwich sont :

$$\begin{aligned} \delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u} \\ \delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v} \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \tag{8}$$

Equations (8) peuvent être exprimées en termes des déplacements (u, v, w_b, w_s). Pour la plaque de FGM, les équations d'équilibre (8) prennent la forme :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\ - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u} \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} \\ - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v} \end{aligned} \tag{9b}$$

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \end{aligned} \tag{9c}$$

$$\begin{aligned} B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = \\ I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \nabla^2 \ddot{w}_b \end{aligned} \tag{9d}$$

1.5. Une analyse aux valeurs propres pour les problèmes de vibration

Les équations, ci-dessous, des valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de m et n, pour le problème de vibration peut être écrite comme :

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\} \tag{10}$$

2. Résultats Numériques et Discussions

La figure 2 montre les paramètres de fréquences fondamentaux en fonction du rapport épaisseur - côté des plaques sandwiches P - FGM simplement appuyées. Les fréquences sont maximales pour les plaques en céramiques et minimales pour les plaques en métal. On constate que les résultats augmentent lentement lorsque la quantité de la céramique augmente dans la plaque sandwich. Il est montré que l'effet de l'indice k sur la plaque sandwich 1-0-1 sans la couche du cœur homogène, est plus grand que celle de sandwich 1-8-1 avec un cœur rigide et homogène.

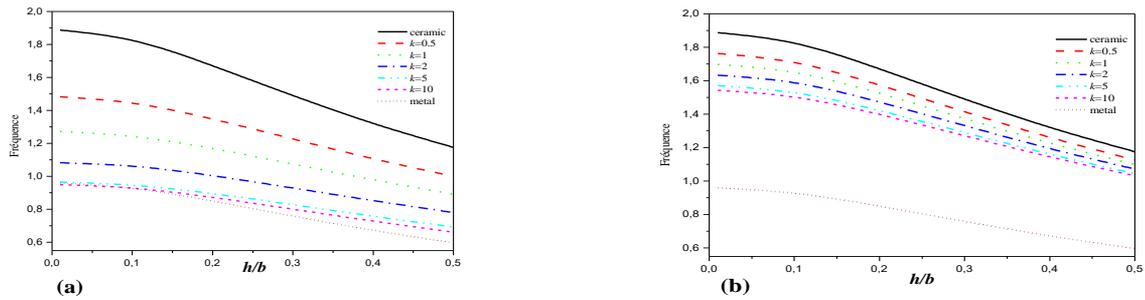


Figure 2. Fréquences fondamentales des plaques sandwiches P-FGM avec un cœur rigide et homogène : (a) plaque sandwich FGM 1-0-1, (b) plaque sandwich FGM 1-8-1.

3. Conclusion

La théorie raffinée proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement des vibrations libres des plaques sandwiches en FGM. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque.

4. Bibliographie

- [Bao 95]. Young, G., Wang, L., « Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings », *International Journal of Solids and Structures*, 32, 2853–2871, 1995.
- [Mar 99] Marur, P.R., « Fracture Behaviour of Functionally Graded Materials », *PhD Thesis, Auburn University, Alabama*, 1999.
- [Li 08] Li, Q., Iu, V.P., Kou, K.P. « Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates », *Journal of Sound and Vibration*, 311, 498–515, 2008.