

Analyse du comportement mécanique des poutres à gradient variable type FGM

Abdelkader SAFA^{1,3}, Lazreg HADJI², Faïçal BOURAADA³, ADDA Bedia EA³.

¹ Département de Génie Civil, Université Ahmed Zabana de Rélizane, 48000, Algérie, safaabk@yahoo.fr

² Département de Génie Civil, Université Ibn Khaldoun, BP 78 Zaaroura, 14000 Tiaret, Algérie.

³ Laboratoire des Matériaux & Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbes, Algérie.

RÉSUMÉ. Dans ce papier, une théorie de cisaillement des poutres d'ordre élevé est développée pour l'analyse statique des poutres à gradient de propriétés type FGM. La théorie présentée n'exige pas des facteurs de correction de cisaillement, et donne lieu à des variations parabolique des contraintes de cisaillement transversale à travers l'épaisseur pour satisfaire les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieur et inférieur de la poutre. Dans cette étude on suppose que le module de Young de la poutre varie dans le sens de l'épaisseur selon une simple loi de puissance P-FGM. Les équations d'équilibre pour la poutre FGM ont été trouvées en appliquant le principe des travaux virtuels. La solution de type Navier à été utilisé pour obtenir les résultats en terme des déplacements et des contraintes normales et de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre. Différentes théories de cisaillement d'ordre élevé et la théorie classique des poutres ont été utilisés. La validité de la présente théorie est montrée en comparant certains résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature.

MOTS-CLEFS : Poutre, FGM, Statique, Déformation, Solution de Navier.

ABSTRACT. In this paper, a higher order shear deformation beam theory is developed for static analysis of functionally graded beams. The theory account for higher-order variation of transverse shear strain through the depth of the beam and satisfies the zero traction boundary conditions on the surfaces of the beam without using shear correction factors. The material properties of the functionally graded beam are assumed to vary according to power law distribution of the volume fraction of the constituents. Based on the present higher-order shear deformation beam theory, the equilibrium equations are derived from principle of virtual displacements. Navier type solution method was used to obtain results. Different higher order shear deformation theories and classical beam theories were used in the analysis. A static is given for different material properties. The accuracy of the present solutions is verified by comparing the obtained results with the existing solutions.

KEY WORDS: Beam, FGM, Static, Deformation, Navier Solution.

1. Introduction

L'utilisation des structures comme poutres, plaques et coques, qui sont fabriqués à partir des matériaux FGM, est en augmentation en raison de la variation continue et gradué des propriétés des matériaux. Cette variation permet une répartition continue des contraintes dans les structures FGM, tandis que la répartition des contraintes discontinues apparaît dans un autre type de matériaux avancés, comme les composites laminés. Depuis l'utilisation de ces matériaux FGM dans les domaines de l'aérospatiale, de l'automobile et des éléments de la machine, la compréhension de leur comportement mécanique est importante.

Le présent travail porte sur l'analyse du comportement statique des poutres simplement appuyées en matériau FGM en utilisant une approche simplifiée de déformation des poutres. Dans cette étude on suppose que le module de Young de la poutre FGM varie dans le sens de l'épaisseur selon une simple loi de puissance P-FGM. Les équations d'équilibres pour la poutre FGM ont été trouvées en appliquant le principe des travaux virtuels. La validité de la présente théorie est montrée en comparant certains résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature.

2. Formulation théorique

2.1. Propriétés des matériaux

Les propriétés du FGM varient continuellement due au changement gradué de la fraction volumique des matériaux constitutifs (céramique et métal), généralement dans le sens de l'épaisseur. La fonction de loi de puissance est couramment utilisée pour décrire ces variations des propriétés des matériaux.

La fraction volumique de la poutre P-FGM est supposé varier suivant l'épaisseur de la poutre selon une fonction simple en loi de puissance :

$$g(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P \quad (1)$$

Où, g désigne la fonction de la fraction volumique de la poutre; P est l'indice de puissance qui décrit le profil de variation des matériaux suivant l'épaisseur.

Les propriétés matérielles effectives, comme le module de Young E , coefficient de Poisson ν , et la densité de masse ρ , peuvent être exprimée par une loi de mélange comme :

$$P(z) = (P_1 - P_2)g(z) + P_2 \quad (2)$$

Où P_1 and P_2 sont les propriétés des faces supérieures et inférieures de la poutre FGM.

2.2. Description du problème et équations de base

Considérons le cas d'une poutre FGM, voir la Fig.1, de longueur L et d'épaisseur uniforme h . Les faces supérieure et inférieure de la poutre FGM sont à $z = \pm h/2$.

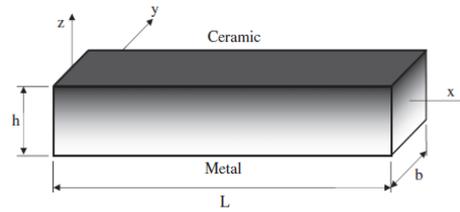


Figure 1. Géométrie de la poutre FGM.

On suppose que le module de Young de la poutre FGM varie à travers l'épaisseur selon une loi de puissance P-FGM comme :

$$E(z) = (E_1 - E_2)g(z) + E_2 \quad (3)$$

Où E_1 and E_2 sont les modules de Young des faces supérieures et inférieures de la poutre FGM, respectivement.

Selon cette distribution, la surface inférieure ($z = -h/2$) de la poutre FGM est en métal, tandis que la surface supérieure ($z = h/2$) est en céramique, et pour différentes valeurs de p on peut obtenir les différentes fractions volumiques du FGM.

2.3. Champ de déplacement

Le champ de déplacement utilisé dans cette étude est:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (4)$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (5)$$

avec u_0 est le déplacement de ligne moyenne dans la direction de x et w_b et w_s sont les déplacements de flexion et de cisaillement.

Où $f(z)$ représente la fonction de distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre qui est donnée sous la forme :

$$f(z) = z - \frac{1}{2} z \left(\frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) \quad (6)$$

2.4. Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre de la poutre FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe des travaux virtuels. Le principe sous la forme analytique :

$$\delta w_{\text{ext}}(\delta u) + \delta w_{\text{int}}(\delta u) = 0 \quad (7)$$

Les équations d'équilibre obtenues pour la poutre FGM sont les suivantes :

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = 0, \quad \delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q = 0, \quad \delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad (8)$$

Où N , M_b , M_s et Q sont les l'effort normal, moment de flexion, moment de cisaillement et effort tranchant respectivement.

2.5. Solution analytique

Les équations d'équilibres admettent la solution de Navier pour les poutres simplement appuyées. Les variables u_0, w_b, w_s et la force extérieure pour le cas de charge uniformément répartie peuvent être écrit en supposant les variations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} U_m \cos(\lambda x) \\ W_{bm} \sin(\lambda x) \\ W_{sm} \sin(\lambda x) \end{cases}; \quad q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin(\lambda x); \quad Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\lambda x) dx \quad (10)$$

Où U_m, W_{bm} , et W_{sm} sont des paramètres à déterminer, et $\lambda = m\pi / L$, Q_m est l'amplitude de la charge. La solution analytiques peut être obtenu par substitution des expressions de u_0, w_b, w_s et q de l'équation (10).

2.6. Résultats numériques et discussion

Dans cette étude, l'analyse de flexion des poutres FGM simplement appuyées par la présente théorie est effectuée pour discussion. Pour la poutre FGM, les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont : Céramique (P1, alumine, Al_2O_3), $E_c=380\text{GPa}$, $\nu=0.3$. Métal (P2, Aluminium, Al), $E_m=70\text{GPa}$, $\nu=0.3$.

Les résultats numériques sont présentés en termes des flèches, déplacement, et contraintes adimensionnelles définies comme :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u \left(0, -\frac{h}{2} \right), & \bar{w} &= 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w \left(\frac{L}{2} \right), \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right), & \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz} (0,0) \end{aligned}$$

Le tableau 2 présente une comparaison des résultats des déplacements et des contraintes des poutres FGM sous charge uniforme pour différentes valeurs de d'indice matériel p et du rapport L/h . Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats analytiques des autres théories de cisaillement (ESDBT, SSDBT, PSDBT) proposés par [2]. Le tableau 3 montre les différentes formes des fonctions de cisaillement utilisé dans la comparaison. À partir des résultats présentés dans le tableau 2, on peut constater que les résultats de cette approche simplifiée de déformation montrent un bon accord avec ceux obtenus par les autres théories de cisaillement des poutres pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance p et le rapport L/h [2]. On remarque aussi que la théorie classique des poutres CBT donne des résultats inférieurs de la flèches par rapports aux théories de cisaillement qui du à la négligence des l'effet de cisaillement.

Tableau 2. Déplacements et contraintes adimensionnel pour une poutre FGM sous charge uniforme.

	Théories	L/h = 5			L/h = 20		
		\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	CBT	2.8783	3.7500	-	2.8783	15.0000	-
	ESDBT	3.1635	3.8083	0.776	2.8961	15.0145	0.7908
	SSDBT	3.1649	3.8052	0.754	2.8962	15.0137	0.7672
	PSDBT	3.1654	3.8019	0.733	2.8962	15.0129	0.7437
	Present	3.1654	3.8019	0.733	2.8962	15.0129	0.7437
1	CBT	5.7746	5.7958	-	5.7746	23.1834	-
	ESDBT	6.2563	5.8944	0.776	5.8047	23.2078	0.7908
	SSDBT	6.2586	5.8891	0.754	5.8049	23.2065	0.7672
	PSDBT	6.2594	5.8835	0.733	5.8049	23.2051	0.7437
	Present	6.2594	5.8835	0.733	5.8049	23.2051	0.7437
5	CBT	8.7508	7.9428	-	8.7508	31.7711	-
	ESDBT	9.8414	8.1329	0.640	8.8191	31.8184	0.6554
	SSDBT	9.8367	8.1219	0.615	8.8188	31.8156	0.6282
	PSDBT	9.8281	8.1104	0.590	8.8182	31.8127	0.6013
	Present	9.8281	8.1104	0.590	8.8182	31.8127	0.6013
10	CBT	9.6072	9.5228	-	9.6072	38.0912	-
	ESDBT	10.9404	9.7343	0.694	9.6907	38.1438	0.7106
	SSDBT	10.9419	9.7236	0.670	9.6908	38.1411	0.6847
	PSDBT	10.9381	9.7119	0.646	9.6905	38.1382	0.6586
	Present	10.9381	9.7119	0.646	9.6905	38.1382	0.6586

Tableau 3. Différentes forme des fonctions de cisaillement $f(z)$.

Modèle	$f(z)$
PSDBT de Reddy	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
SSDBT de Touratier	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$
ESDBT de Karama	$ze^{-2(z/h)^2}$
CBT	0

La figure 2 montre la variation du déplacement transversal adimensionnel \bar{w} en fonction du rapport x/L en utilisant la présente théorie et la théorie de cisaillement de Reddy PSDBT pour différentes valeurs de l'indice de matériel p .

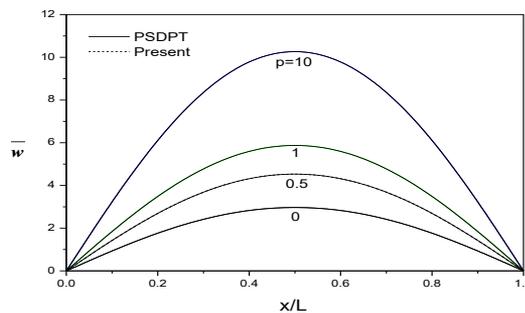


Figure 2. Variation du déplacement transversal \bar{w} en fonction du rapport adimensionnel (x / L) de la poutre FGM ($L=5h$).

On remarque que la présente théorie des poutres raffinées donne des résultats presque identiques avec la théorie PSDBT. En outre, les résultats montrent que l'augmentation de l'indice matériel p conduit à une augmentation du déplacement transversal W . La poutre entièrement céramique ($p=0$) donne la plus faible flèche, tandis que la poutre entièrement métallique ($p=\infty$) donne la plus grande valeur de la flèche.

Conclusion

Cette étude porte sur l'analyse du comportement statique des poutres P-FGM simplement appuyées en utilisant une approche simplifiée de déformation des poutres. Le module de Young est supposé varier dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM en fonction de la loi de puissance. Les équations d'équilibre ont été trouvées en utilisant le principe des travaux virtuels. Solution de type Navier a été utilisé pour obtenir les résultats. Des résultats sous forme des déplacements et des contraintes adimensionnels sont calculés et comparés à ceux disponibles dans la littérature. En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée donne des solutions qui sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement des poutres.

Références

- [1] Marur, P. R. Fracture Behaviour of Functionally Graded Materials, Ph. D. dissertation, Auburn University, Alabama (1999).
- [2] Huu, Huu-Tai Thai, Thuc P., Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, International Journal of Mechanical Sciences 62, 57–66, 2012.
- [3] Simsek M. Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. Nucl Eng Des 2010;240(4): 697–705.
- [4] Huu, Huu-Tai Thai, Thuc P., Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, International Journal of Mechanical Sciences 62, 57–66, 2012.