Analyse en flexion des plaques FGM sur fondation élastique

Nebab Mokhtar [1], Ait Atmane Hassen[2] , Bennai Riadh[3]

[1] *LsME, Hassiba Benbouali Université de Chlef ,B.P.151, 02000,Esselam,Chlef Algerie*

m.nebab@univ-chlef.dz

[2] *Lm&H, Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès BP 89 Cite´ Ben M'hidi, 22000 Sidi Bel Abbes, Algerie*

aitatmane2000@yahoo.fr

[3] *LsME, Hassiba Benbouali Université de Chlef ,B.P.151, 02000,Esselam,Chlef Algerie*

r.bennai@yahoo.fr

RÉSUMÉ. *Dans ce travail, l'analyse statique des plaques de matériaux fonctionnellement gradués sur une assise élastique des paramètres de Winkler / Pasternak a été développée en utilisant la théorie du première ordre de la déformation par cisaillement. Dans cette théorie a été pris en compte le coefficient de déformation de cisaillement correctrice et axe neutre de plaque fonctionnellement graduées est déterminée. Les propriétés matérielles à gradation fonctionnelle suivent une fonction de loi de puissance. On a obtenu la dérivation des équations de mouvement par le principe de Hamilton. Les solutions analytiques des équations des mouvements sont présentées pour des plaques graduellement fonctionnelles simplement appuis en utilisant des séries de Fourier. Les résultats sont comparés avec théorie supérieur de cisaillement pour vérifier la validité de la théorie développée. Les effets du paramètre de fondation élastique sur la contrainte et les déplacements sont étudiés.*

ABSTRACT. *In this work, static analysis of the functionally graded materials plates(FGM) on Winkler / Pasternak parameter elastic foundation has developed using the first shear deformation theory. In this theory was taken into account coefficient corrector shear deformation and neutral surface of functionally graded plates is determined. The functionally graded material properties follow a power law function. It obtained the derivation of the equations of motion by the principle of Hamilton. Analytical Solutions of motions equations are presented for simply supported functionally graded plates using Fourier series. The results are compared with height shear deformation verify the validity of the developed theory. Effects of the parameter of elastic foundation on the stress and displacements are investigated.*

MOTS-CLÉS : *Analyse statique, Assise élastique, plaques de matériaux fonctionnellement gradués, théorie du première ordre de la déformation par cisaillement (FSDT).*

KEY WORDS: *Static analysis, Elastic foundation, functionally graded materials plates, First shear deformation theory (FSDT).*

1. Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (functionnally graded materials : FGM) sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. . Ces matériaux peuvent être fabriqués en variant le pourcentage du contenu de deux ou plusieurs matériaux tel que les nouveaux matériaux qui ont la gradation de propriété désirée dans des directions spatiales. La gradation dans les propriétés des matériaux réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte trouvés dans les composites stratifiés.

Zenkour , a présenté une étude de plaques à gradations fonctionnelles reposant sur des fondations de Winkler-Pasternak dans diverses conditions aux limites en utilisant la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Taibi et al. ont présenté le comportement de déformation thermomécanique de plaques sandwich à gradient fonctionnel déformable par cisaillement reposant sur une fondation élastique à deux paramètres (modèle Pasternak). Huang et al. Ont étudié les solutions de référence pour les plaques FGM(functionally graded materials) épais reposant sur les fondations élastiques de Winkler Pasternak en utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelles (3D). Lu et al. , basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelles (3D), a étudié l'analyse des vibrations libres des plaques épaisses FG reposant sur des fondations élastiques. Malekzadeh a étudié l'analyse des vibrations libres de FG épais reposant sur des fondations élastiques basées sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelles(3D).

D'où, pour simplifier les équations gouvernantes pour la plaque FGM dans le présent travail, le système de coordonnée est localisé à la surface neutre physique de la plaque. Un modèle de déplacement général pour l'analyse de la flexion et des contraintes est développé pour les plaques FG reposant sur des fondations élastiques à un ou deux paramètres.

2. Formulation

2.1. Géométries et matériaux

Considérant une plaque rectangulaire en FGM d'épaisseur h, de longueur a, et d'épaisseur b, mentionné par rapport aux coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z). Le plan x – y est pris pour être le mi-plan de la non-déformé du plan de la plaque et l'axe z est perpendiculaire au plan x – y. Les propriétés matérielles non homogènes de la plaque FGM, en fonction de la coordonnée d'épaisseur comme suit

$$P(z) = P_M + (P_C - P_M)\left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2}\right)^k \qquad [1]$$

Où P_M et P_C sont les propriétés correspondantes du métal et de la céramique, respectivement, et k est le paramètre matériel. De plus, le paramètre C'est la distance entre la surface neutre et la surface médiane. La position de la surface neutre de la plaque FGM est déterminée pour satisfaire le premier moment par rapport au module de Young étant zéro comme suit

$$C = \frac{\int_{h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{h/2}^{h/2} E(z_{ms})\ dz_{ms}} \qquad [2]$$

2.2. Cinématiques and Constitutive Equations

Champ de déplacement basé sur la présente théorie du première ordre de la déformation par cisaillement (FDST) avec surface physique neutre décrite comme suit

$$\begin{aligned} u(x, y, z_{ns}, t) &= u_0(x, y, t) + z_{ns}\varphi_x \\ v(x, y, z_{ns}, t) &= v_0(x, y, t) + z_{ns}\varphi_y \\ w(x, y, z_{ns}, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \qquad [3]$$

2.3. Equations Of Motion

Les équations d'équilibre qui gouvernent peuvent être dérivées en utilisant le principe Hamilton. Les équations d'équilibre associées à la présente théorie du première ordre de la déformation par cisaillement (FDST) sont

$$\begin{aligned}
\delta u_0: &\quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\delta v_0: &\quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
\delta \varphi_x: &\quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0 \\
\delta \varphi: &\quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_{yz} = 0 \\
\delta w: &\quad \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - f_e + q = 0
\end{aligned} \qquad [5]$$

2.4. Solution de Navier

Pour la solution analytique de l'équation 5, la méthode Navier est utilisée dans les conditions aux limites spécifiées :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x)\sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x)\cos(\mu y) \\ W_{mn} \sin(\lambda x)\sin(\mu y) \\ X_{mn} \sin(\lambda x)\sin(\mu y) \\ Y_{mn} \sin(\lambda x)\sin(\mu y) \end{Bmatrix} \qquad [6]$$

Où, U_{mn} , V_{mn} , Ψ_{mn} , et W_{mn} , et arbitrairement sont les paramètres à déterminer $\lambda = m\pi / a$, $\mu = n\pi / b$ .Pour le cas de la distribution de la charge sinusoïdale, nous avons

$$q = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \qquad [7]$$

Où, q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque. Remplacer l'équation (7 et 8) dans l'équation (5), des solutions analytiques peuvent être obtenues sous la forme:

$$[C]\{\Delta\} = \{P\} \qquad [6]$$

3. Résultats

La plaque FGM est considérée comme étant en aluminium et d'alumine avec les propriétés des matériaux suivants : Métal (aluminium, Al) : EM = 70 GPa ; p_c = 2702 kg / m3. ν = 0,3. Céramique (alumine, AI2O3): EC = 380 GPa; ρ_m = 3800 kg / m3. ν = 0,3

Tableau 1. *Effets de l'exposant de la fraction volumique sur les contraintes adimensionnelles et les déformations d'une plaque carrée FG soumise à une charge sinusoïdale*

k	$\bar{w}$		$\overline{\sigma_x}$		$\overline{\sigma_y}$		$\overline{\sigma_{xy}}$		$\overline{\sigma_{yz}}$		$\overline{\sigma_{xz}}$	
	present	RTP	present	RTP	present	RTP	present	RTP	present	RTP	present	RTP
Ceramic	0.2961	0.2961	1.9758	1.9943	1.3172	1.3124	0.1910	0.2121	0.1910	0.2386	0.7092	0.7067
1	0.5890	0.5890	3.0537	3.0850	1.4968	1.4898	0.2348	0.2608	0.1910	0.2386	0.6125	0.6111
2	0.7552	0.7573	3.5657	3.6067	1.4057	1.3960	0.2289	0.2737	0.1625	0.2186	0.5459	0.5442
3	0.8324	0.8375	3.8217	3.8709	1.2872	1.2756	0.2096	0.2677	0.1408	0.2024	0.5547	0.5526
4	0.8736	0.8816	4.0101	4.0655	1.1922	1.1794	0.1899	0.2537	0.1293	0.1944	0.5693	0.5669
5	0.9014	0.9112	4.1848	4.2447	1.1176	1.1041	0.1740	0.2385	0.1251	0.1930	0.5783	0.5757
Metal	1.6072	1.6074	1.9758	1.9943	1.3172	1.3124	0.1910	0.2121	0.1910	0.2386	0.7092	0.7067

Dans le premier exemple, une plaque carrée Al / Al2O3 épaisse (a / h = 10) soumise à une charge sinusoïdale est examinée. Le tableau 1 montre les effets de l'indice de loi de puissance k sur les déplacements et les

contraintes sans dimension. Donc on peut conclure qu'en général, les résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par théorie raffiné (RTP) de mechab et al 2010 pour toutes les valeurs de l'indice de loi d puissance considérées, À part le cas des contraintes de cisaillement transversaux $\overline{\sigma_{xy}}$ et $\overline{\sigma_{yz}}$ Où on remarque une légère différence entre la présente théorie et la RTP. Cela est dû au faite que la présente théorie enfreint les conditions aux limites de contraintes libres sur la surface de la plaque.

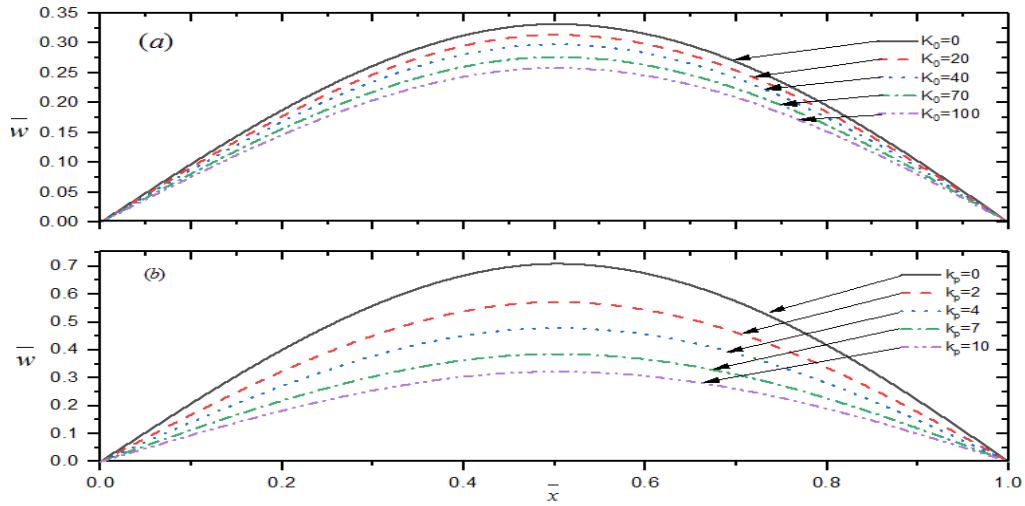

Figure. 1. *La déflexion sans dimension* $\overline{w}$ *de la plaque FGM carrée sur fondation élastique.*

Dans la figure 1a et b, est présentée La déflexion adimensionnelle $\overline{w}$ de la plaque FGM carrée sur fondation élastique à partir de la coordonnée d'épaisseur z. En conclusion, les déplacements transversaux sont diminués lors de l'existence de la fondation élastique. Les chiffres montrent clairement que la rigidité de couche cisaillement de la fondation (le coefficient de Pasternak k_p) est plus efficace que le coefficient de Winkler pour diminuer les déplacements.

4. Conclusion

l'analyse en flexion de plaques FGM sur des fondations élastiques a été développée en supposant que les déplacements transversaux en cisaillement utilisent une théorie simple. Le présent procédé est basé sur la théorie de l'élasticité bidimensionnelle et prend en compte l'effet des contraintes transversales de cisaillement en tenant compte du correcteur de cisaillement et de la surface neutre déterminée de la plaque FGM. Les équations du mouvement et les conditions aux limites associées sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton. Pour la solution analytique de la plaque de FGM avec des conditions aux limites simplement supportées, la méthode de Navier a été utilisée. Afin de prouver l'exactitude de la présente théorie, les résultats de la théorie actuelle ont été comparés aux résultats publiés d'autres théories de déformation par cisaillement.

5. Bibliographie

[HUA 08]Lü, C. F., C. W. Lim, and W. Q. Chen. "Exact Solutions for Free Vibrations of Functionally Graded Thick Plates on Elastic Foundations." *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 16, no. 8 (2009/10/30 2009): 576-84.

Malekzadeh, P. "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundations." *Composite Structures* 89, no. 3 (2009/07/01/ 2009): 367-73.

Taibi, Fatima Zahra, Samir Benyoucef, Abdelouahed Tounsi, Rabbab Bachir Bouiadjra, El Abbas Adda Bedia, and SR Mahmoud. "A Simple Shear Deformation Theory for Thermo-Mechanical Behaviour of Functionally Graded Sandwich Plates on Elastic Foundations." *Journal of Sandwich Structures & Materials* 17, no. 2 (2015): 99-129.

Zenkour, A. M., and A. F. Radwan. "Compressive Study of Functionally Graded Plates Resting on Winkler–Pasternak Foundations under Various Boundary Conditions Using Hyperbolic Shear Deformation Theory." *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 18, no. 2 (2018/02/01/ 2018): 645-58.