
Analyse de la flexion cylindrique des plaques FGM

Tahar Hassaine Daouadji¹, Benferhat Rabia¹, Boussad Abbes², Rabahi Abderezak¹, Adim Belkacem¹, Fazilay Abbes²

¹ Laboratoire LGéo2D, Université de Tiaret, Algérie (daouadjitahar@gmail.com)

² Laboratoire GRESPI— Université de Reims, France (boussad.abbes@univ-reims.fr)

RÉSUMÉ. Cet article examine les problèmes des plaques à gradient fonctionnel en flexion cylindrique dans le quel les propriétés des matériaux varient à travers l'épaisseur. La variation des propriétés suit deux distributions en loi de puissance et exponentielle en termes de fractions volumiques. En outre, ce document estime de matériaux orthotropes plutôt que de matériaux isotropes. La condition de traction libre sur la surface supérieure est remplacée par l'état de charge uniforme appliquée sur la surface supérieure. Les résultats numériques sont présentés pour montrer l'effet de la distribution des propriétés du matériau sur les contraintes et les flèches. Les résultats obtenus montrent que, pour tous les autres paramètres restant les mêmes, les cas étudiés (pour les contraintes et les flèches) des plaques P-FGM et E-FGM sont toujours proportionnelles à celles des plaques homogènes isotropes. Par conséquent, on peut prédire que le comportement des plaques P-FGM et E-FGM est semblable aux plaques homogènes.

ABSTRACT. This article considers the problems of cylindrical bending of functionally graded plates in which material properties vary through the thickness. The variation of the material properties follows two power-law distributions in terms of the volume fractions of constituents. In addition, this paper considers orthotropic materials rather than isotropic materials. The traction-free condition on the top surface is replaced with the condition of uniform load applied on the top surface. Numerical results are presented to show the effect of the material distribution on the deflections and stresses. Results show that, all other parameters remaining the same, the studied quantities (stress, deflection) of P-FGM and E-FGM plates are always proportional to those of homogeneous isotropic plates. Therefore, one can predict the behaviour of P-FGM and E-FGM plates knowing that of similar homogeneous plates.

MOTS-CLÉS : plaques à gradient de propriétés; flexion cylindrique; solution en élasticité.

KEY WORDS: Functionally graded plates; Cylindrical bending, Elasticity solutions.

1. Introduction

Le problème flexion statique est l'un des problèmes fondamentaux et les plus étudiés dans l'analyse des plaques MGF. Reddy [RED 99] ont examiné la flexion des plaques à gradient fonctionnel circulaires et annulaire basée sur la théorie de cisaillement de plaque déformable de premier ordre. Des relations exactes entre les solutions de flexion de la théorie classique de la plaque (CPT) et la théorie de cisaillement de premier ordre ont été développés. Zenkour [ZEN 2006] a développé la solution exacte pour les plaques FGM en utilisant la théorie généralisée de déformation en cisaillement sinusoïdale et présenté des résultats numériques sur le déplacement et la réponse au contrainte normale et tangentielle de plaques FGM sous chargement uniforme. Kadoli [KAD 2007] ont étudié le comportement statique des matériaux à gradient de propriété céramique- métal des poutres sous la température ambiante en utilisant le champ de déplacement basé sur la théorie d'ordre supérieur de déformation en cisaillement. Une solution à deux dimensions générales pour l'analyse statique d'une console en matériau orthotrope en utilisant la fonction d'Airy a été présenté par Zhong et Yu [ZHO 2007]. Ding [DIN 2007] ont dérivé des équations aux dérivées partielles, pour le problème de contraintes planes des poutres généralement anisotrope et des fonctions de contrainte de celui-ci pour obtenir une solution d'élasticité des poutres FGM anisotrope avec des conditions aux limites différentes. Mian et Spencer [MIA 98] a établi de l'équation des plaques minces classiques, de manière simple, une grande classe de 3D thermo - élastique des solutions pour les plaques fonctionnellement gradué avec des surfaces libres. Yang [YAN 2008] a étendu la méthode présentée par Mian et Spencer [MIA 98] et à considérer le problème de la flexion cylindrique de plaque orthotrope. L'utilisation de la méthode de la fonction complexe [ENG 82] a fait une nouvelle extension en tenant compte de l'effet des pressions de surface supérieure, qui satisfait l'équation bi harmonique ou l'ordre supérieur semblables.

Dans ce papier, des solutions d'élasticité en flexion cylindrique sont présentées pour des plaques P-FGM et E-FGM. Les résultats montrent que, tous les paramètres restent les mêmes; les paramètres étudiés (contrainte et déformation) des plaques P-FGM et E-FGM sont toujours proportionnels à ceux des plaques homogènes isotropes. Ensuite, les poutres se comportent comme des poutres FGM homogène qui signifie qu'aucune des techniques spéciales ou logiciel ne doit être développé pour leur analyse.

2. Formulations théorique

21. Propriétés des matériaux constitutifs des FGM: Un matériau FGM peut être définie par la variation dans les fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction en loi de puissance ou de la fonction exponentielle pour décrire les fonctions de volume. Toute fois, seules quelques études utilisées la fonction sinusoïdale pour décrire les fractions de volume. Considérons une plaque FGM rectangulaire d'épaisseur uniforme, ce qui est fait de céramique et de métal, est considéré dans cette étude. Les propriétés des matériaux, module d'Young et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont près selon les exigences de performance. Cependant, le module d'Young et le coefficient de Poisson des plaques FGM varient continuellement seulement dans le sens de l'épaisseur (axe y). Delale et Erdogan [DEL 83]a indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moindre que celle du module de Young. Ainsi, le coefficient de Poisson des poutres est supposé constante. Cependant, les modules de Young dans la direction de l'épaisseur des plaques de FGM [HAS 2013] varient avec la fonction puissance pour les matériaux P-FGM ou avec la fonction exponentielle pour les matériaux E-FGM.

Propriétés des matériaux des plaques P-FGM : La fraction volumétrique des matériaux P-FGM est supposée obéir à une fonction en loi de puissance.

$$g(y) = \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \quad (1)$$

Où p est le paramètre du matériau qui dicte le profil de variation du matériel à travers l'épaisseur h de la plaque, une fois la fraction volumique locale $g(y)$ a été définie, les propriétés du matériau P-FGM peut être déterminé par la règle de mélange suivante.

$$E(y) = g(y)E_1 + (1 - g(y))E_2 \quad (2)$$

Où E_1 et E_2 sont les modules de Young, de la surface supérieur ($y = h/2$) et la surface inférieur ($y = -h/2$) de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM, qui montre que les changements du module d'Young rapidement près de la surface la plus basse pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

Propriétés des matériaux des plaques E-FGM : De nombreux chercheur ont utilise la fonction exponentielle pour décrire les propriétés du matériau, comme suit:

$$E(z) = A.e^{B(y+\frac{h}{2})} \quad \text{avec: } A = E_2 \text{ et } B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (3)$$

2.2. Analyse théorique:

Équations fondamentales pour la flexion cylindrique des plaques FGM: Considérons une plaque en matériaux FGM d'épaisseur uniforme, le plan x - z coïncide avec le plan moyen de la plaque, dont les dimensions sont $0 \leq x \leq l$; $-h/2 \leq y \leq h/2$; $-\infty \leq z \leq +\infty$; notons par u et w les déplacements suivants les deux directions x et z respectivement, σ_{xx} ; τ_{yx} et σ_{yy} sont les contraintes normales et de cisaillements dans le plan xz , la plaque est sollicitée sur la surface supérieur par une charge uniforme, c'est le cas de la flexion cylindrique, tous les déplacements et les contraintes sont indépendantes des coordonnées de l'axe z .

En absence des forces volumiques, l'équation différentielle d'équilibre:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

La relation contrainte déformation des matériaux orthotrope est exprimée par:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

u et v sont les déplacements suivant x et z .

La relation élastique correspondante des plaques FGM est exprimée par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{avec } Q_{ij} \text{ les rigidités de la plaque, } Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(y)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E(y)}{1-\nu^2}, \quad Q_{66} = \frac{E(y)}{2(1+\nu)}. \quad (8)$$

La solution des équations différentielles (5) (6) et (7) est donnée par:

$$u(x, y) = \bar{u}(x) + F\bar{u}_{,xx} + A\bar{v}_{,x} + B\bar{v}_{,xxx} \quad \text{et} \quad v(x, y) = \bar{v}(x) + G\bar{u}_{,x} + C\bar{v}_{,xx} + D \quad (9)$$

avec $A = A(y)$, $B = B(y)$, $C = C(y)$, $D = D(y)$, $F = F(y)$ et $G = G(y)$ sont des fonction de z , \bar{u} et \bar{v} sont les déplacements à mi hauteur (fibre neutre) de la plaque.

Substituant l'équation (9) dans les équations (6) et (7), nous aurons:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (Q_{11} + G'Q_{12})\bar{u}_{,x} + (AQ_{11} + C'Q_{12})\bar{v}_{,xx} + FQ_{11}\bar{u}_{,xxx} + BQ_{11}\bar{v}_{,xxxx} + D'Q_{12}, \\ \sigma_y &= (Q_{12} + G'Q_{22})\bar{u}_{,x} + (AQ_{12} + C'Q_{22})\bar{v}_{,xx} + FQ_{12}\bar{u}_{,xxx} + BQ_{12}\bar{v}_{,xxxx} + D'Q_{22}, \\ \tau_{xy} &= Q_{66} \left[(A'+1)\bar{v}_{,x} + (F'+G)\bar{u}_{,xx} + (B'+C)\bar{v}_{,xxx} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Substituant l'équation (10) dans (5):

$$\begin{aligned} [Q_{66}(A'+1)]' &= 0, \\ (Q_{12} + Q_{22}G')' &= 0, \\ Q_{66}(A'+1) + (Q_{12}A + Q_{22}C)' &= 0, \\ Q_{11} + Q_{12}G' + [Q_{66}(F'+G)]' &= Q_{66}k_1, \\ Q_{11}A + Q_{12}C' + [Q_{66}(B'+C)]' &= Q_{66}k_2, \\ \bar{u}_{,xxx} &= k_3, \\ \bar{v}_{,xxx} &= k_4. \end{aligned} \quad (11)$$

avec: k_i ($i=1, 2, 3, 4$) sont des constantes arbitraire, par simplification de l'équation (5) on peut écrire:

$$k_1\bar{u}_{,xx} + k_2\bar{v}_{,xxx} = 0, \quad (12)$$

$$[Q_{66}(F'+G) + (Q_{12}F)']k_3 + [Q_{66}(B'+C) + (Q_{12}B)']k_4 + (Q_{22}D)' = 0. \quad (13)$$

Des équations (11f), (11g) et (12), on obtient:

$$k_1k_3 + k_2k_4 = 0. \quad (14)$$

Par intégration de l'équation (11) et (12):

$$\bar{v}(x) = \frac{1}{24}k_4x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4, \quad (15)$$

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{6}k_3x^3 - \frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1}C_1x^2 + C_5x + C_6, \quad (16)$$

C_i ($i=1,2,3,4,5,6$) sont des constants d'intégrations qui sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Considérant les conditions aux bords cylindriques dans les surfaces supérieure ($+h/2$) et inférieure ($-h/2$) de la plaque; sachant que q est constante, nous aurons:

$$\tau_{xy} = 0 \text{ à } y = \pm h/2, \quad \sigma_y = -q \text{ à } y = -h/2, \quad \sigma_y = 0 \text{ à } y = h/2,$$

Substituant les expressions de σ_y et τ_{xy} dans les conditions aux bords cylindriques; pour $y = \pm h/2$, on aura :

$$\begin{aligned}
A'(\pm h/2)+1 &= 0, & Q_{12}(\pm h/2)+Q_{22}(\pm h/2)G'(\pm h/2) &= 0, \\
F'(\pm h/2)+G(\pm h/2) &= 0, & B'(\pm h/2)+C(\pm h/2) &= 0, \\
Q_{12}(\pm h/2)A(\pm h/2)+Q_{22}(\pm h/2)C'(\pm h/2) &= 0, & & (17) \\
Q_{12}(-h/2)[k_3F(-h/2)+k_4B(-h/2)]+Q_{22}(-h/2)D'(-h/2) &= -q, \\
Q_{12}(h/2)[k_3F(h/2)+k_4B(h/2)]+Q_{22}(h/2)D'(h/2) &= 0.
\end{aligned}$$

Étant donnée que \bar{u} et \bar{v} sont les déplacements de la fibre moyenne de la plaque FGM, c'est-à-dire: $\bar{u}(x) = u(x,0)$, $\bar{v}(x) = v(x,0)$.

Nous pouvons déduire de l'équation (9): $A(0)=0$, $B(0)=0$, $C(0)=0$, $D(0)=0$, $F(0)=0$, $G(0)=0$. (18)

L'intégration des équations (11a) – (11e) et (13) en utilisant les équations (17) – (18) et (14), les fonctions $A(y)$, $B(y)$, $C(y)$, $D(y)$, $F(y)$, $G(y)$ et les constantes k_i ($i = 1,2,3,4$) peut être complètement déterminées:

Forces résultantes, moment de flexion, effort de cisaillement et conditions aux bords cylindriques:

On écrit de l'équation (10) et $A(z) = -y$, les expressions suivantes de la force résultante N_x , du moment de flexion M_x et de l'effort tranchant Q_x , peut être déterminé en conséquence.

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dy = N_1 \bar{u},_x + N_3 \bar{v},_{xx} + N_5 \bar{u},_{xxx} + N_7 \bar{v},_{xxxx} + N_0 \quad (19)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} y dy = M_1 \bar{u},_x + M_3 \bar{v},_{xx} + M_5 \bar{u},_{xxx} + M_7 \bar{v},_{xxxx} + M_0 \quad (20)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xx} dy = Q_1 \bar{u},_{xx} + Q_2 \bar{v},_{xxx} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\text{Où: } N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} + Q_{12}G') dy; & M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} y(Q_{11} + Q_{12}G') dy \\
N_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11}A + c_{12}C') dy; & M_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} y(Q_{11}A + Q_{12}C') dy \\
N_5 &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}F dy; & M_5 &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}yF dy \\
N_7 &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}B dy; & M_7 &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}yB dy \\
N_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{12}D' dy; & M_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{12}D' y dy \\
Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{66}(F'+G) dy; & Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{66}(B'+C) dy
\end{aligned} \quad (22)$$

Il y a quatre conditions aux limites différentes sur les bords cylindriques à considérer ici, il s'agit notamment : du bord simplement appuyée (S), du bord encastré de type (C1), du bord encastré de type (C2) et le bord libre (F), à savoir:

$$\begin{aligned}
\text{S: } \bar{u} &= 0; \quad \bar{v} = 0; \quad M_x = 0 & \text{C1: } \bar{u} &= 0; \quad \bar{v} = 0; \quad \bar{v},_x = 0 \\
\text{C2: } \bar{u} &= 0; \quad \bar{v} = 0; \quad u_{,z}|_{z=0} = 0 & \text{F: } N_x &= 0; \quad M_x = 0; \quad Q_x = 0
\end{aligned} \quad (23)$$

3. Résultats numériques et discussion:

Pour plus de commodité, les quantités suivantes sont introduites sans dimension:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{q}; \quad \bar{\tau}_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{q}; \quad \bar{w} = \frac{wE}{qh} \quad (24)$$

Basons sur la formulation, un programme de calcul numérique est développé pour étudier le comportement des plaques FGM en flexion cylindrique. L'analyse est effectuée pour des matériaux purs et différentes paramètres matériels; p , pour l'aluminium – alumine des plaques FGM. Le module de Young et le coefficient de Poisson [SAL 2009]: pour l'aluminium 70 GPa et 0.3; pour l'alumine 380 GPa et 0.3 respectivement. Delale et Erdogan [DEL 83] a indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moindre que celle du module de Young. Ainsi, le coefficient de Poisson des plaques est supposé être constante à 0.3. Considérons une plaque rectangulaire PFGM et EFGM chargée par une charge uniforme sur la surface supérieure d'une étendue infinie dans la direction z .

Nous supposons $q = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, $l = 1 \text{ m}$ et $h/l = 0.15$. Dans tous cas, la surface inférieure de la plaque est supposée être en métal (aluminium) riche et la surface supérieure est supposée être en céramique pure (alumine). Les figures 1, 3 et 5 montrent les distributions de contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ sans dimension le long de la direction de l'épaisseur de la plaque PFGM et EFGM; pour différente valeur de p et E_1/E_2 à $x = l/2$. Il se trouve que $\bar{\sigma}_x$ c'est presque linéairement distribué pour $p=0$ et $E_1/E_2 = 1$, la traction maximale (compression) de contrainte

survient à $y = h/2$. Toute fois pour $p > 0$ et $E_1/E_2 > 1$, pour lequel l'emplacement de rigidité maximale est à $y = h/2$, la valeur de la traction maximale de contrainte est atteinte à $y = h/2$ et augmente avec p et E_1/E_2 .

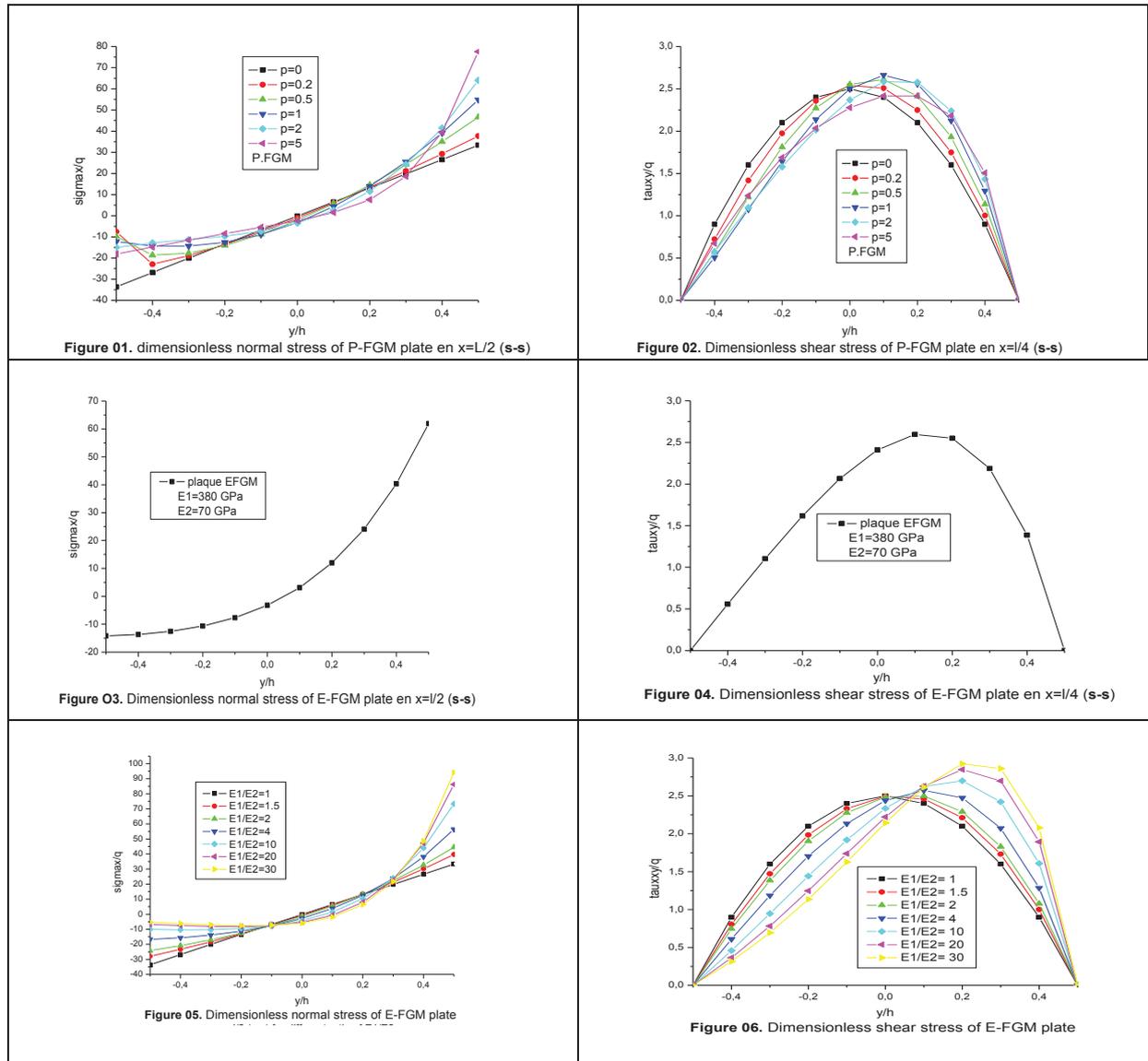


Table 1. Flèche d'une plaque rectangulaire PFGM et EFGM selon les conditions aux limites à $x = l/2$.

Plaque PFGM	Conditions aux limites	P = 0	P = 0.5	P = 5
	S-S	324.47	358.12	176.168
C1-C1	60.74	25.08	13.16	
C2-C2	82.494	58.46	23.31	
C1-S	125.90	71.31	38.72	
C2-S	147.41	93.52	58.55	
C1-F	1811.08	2143.08	1129.13	
C2-F	1893.98	2227.26	1205.15	
Plaque EFGM	Conditions aux limites	$E_1/E_2 = 1$	$E_1/E_2 = 2$	$E_1/E_2 = 10$
	S-S	324.47	223.72	79.21
	C1-C1	60.74	43.18	19.90
	C2-C2	82.494	55.51	23.99
	C1-S	125.90	56.28	24.30
	C2-S	147.41	70.30	25.62
	C1-F	1811.08	1303.73	607.77
	C2-F	1893.98	1350.48	624.32

Les figures 2, 4 et 6 montrent les distributions de contrainte de cisaillement adimensionnelle $\bar{\tau}_{yx}$ dans la direction de l'épaisseur de la plaque PFGM et EFGM; pour différente valeur de p et E_1/E_2 à $x = l/4$. Nous constatons une distribution parabolique de $\bar{\tau}_{yx}$ pour $p=0$ et $E_1/E_2 = 1$, la valeur maximale est atteinte à $y = 0$ la courbe est également symétrique par rapport à ce point. Pour $p > 0$ et $E_1/E_2 > 1$, la contrainte de cisaillement maximum est atteint s'approche de la surface inférieur $y = h/2$ et augmente avec p et E_1/E_2 .

Le tableau 1 donne les valeurs de la flèche w de la plaque FGM pour sept différents types de conditions aux limites et trois valeurs pour p et E_1/E_2 à $x = l/2$. Il est constaté que la déformation diminue à mesure que p et E_1/E_2 augmente; indépendamment des conditions aux limites. C'est tout simplement parce que la rigidité de plaque FGM augmente avec p et E_1/E_2 .

4. Conclusions

Les solutions d'élasticité pour les plaques fonctionnellement graduées en flexion cylindriques sont obtenues par extension de la théorie des plaques FGM suggéré par Mian et Spencer. Les coefficients du matériau peut varier arbitrairement avec l'épaisseur. Les résultats numériques montrent que les conditions aux limites et l'homogénéité du matériau à des effets évidents sur la réponse des plaques rectangulaire FGM en flexion cylindrique. Surtout, il facile de provoquer une concentration de contrainte à proximité de l'emplacement de la rigidité maximale lorsque l'homogénéité du matériau est changée. Par conséquent, le comportement mécanique des plaques rectangulaire FGM en flexion cylindrique peut être optimisé en ajustant correctement les facteurs mentionnés ci-dessus dans les applications d'ingénierie. Parce qu'aucune des hypothèses simplificatrices sur les contraintes et les champs de déplacements introduits, la solution d'élasticité proposée peut servir de référence pour accéder à la validation des théories approximative des plaques ou des méthodes numériques qui peuvent être utilisées dans l'analyse de ces plaques.

Acknowledgments:

This research was supported by the French Ministry of Foreign Affairs and International Development (MAEDI) and Ministry of National Education, Higher Education and Research (MENESR) and by the Algerian Ministry of Higher Education and Scientific Research (MESRS) under Grant No. PHC Tassili 17MDU992. Their support is greatly appreciated.

5. Références

- [DEL 83] Delale F., Erdogan F. «The crack problem for a nonhomogeneous plane». ASME Journal of Applied Mechanics 50, 1983:609 –614.
- [DIN 2007] Ding HJ, Huang DJ, Chen WQ. «Elasticity solutions for plane anisotropic functionally graded beams». Int. J. of Solids and Structures 44, 2007:176 – 196.
- [ENG 2006] England, A.H. «Bending solution for inhomogeneous and laminated elastic plates». Journal of Elasticity 82(2), 2006:129 – 173.
- [HAS 2013] Hassaine Daouadji T., Abdelaziz H.H. , Tounsi A, Adda bedia E A, « Elasticity Solution of a Cantilever Functionally Graded Beam », Applied Composite Materials 2013, volume 20, issue 1, pages 1-15
- [KAD 2007] Kadoli R, Akhtar K, Ganesan N. «Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory». Applied Mathematical Modelling 2007; In press.
- [MIAN 98] Mian A.M., Spencer A.J.M. «Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials». Journal of the Mechanics and Physics of Solids 42(12), 1998:2283 – 2295.
- [RED 99] Reddy, J.N., Wang, C.M., Kitipornchai, S. «Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates». European Journal of Mechanics A/Solids 18(2), 1999:185 – 199.
- [SAL 2009] Sallai B-O., Tounsi A, Mechab I, Bachir Bouiadjra M, Meradjah M, Adda Bedia E.A. «A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al₂O₃ S-FGM thick beams». Computational Materials Science 44, 2009:1344 – 1350.
- [YAN 2008] Yang B, Ding, HJ, Chen W. «Elasticity solutions for functionally graded plates in cylindrical bending». Applied Mathematics and Mechanics 29(8), 2008:999 – 1004.
- [ZEN 2006] Zenkour AM. «Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates». Applied Mathematical Modelling 2006; 30: 67 – 84.
- [ZHE 2007] Zheng Zhong and Tao Yu. «Analytical solution of a cantilever functionally graded beam». Composite Science and Technology 67, 2007:481 – 488.