

# Précontrainte Partielle, Précontrainte Totale

## Approche du dimensionnement d'une poutre Isostatique.

Nadim Abdel Nour<sup>1</sup>, Dominique Vié<sup>2</sup>, Alaa Chateaneuf<sup>1</sup>, Sofiane Amziane<sup>1</sup>,  
Assad Kallassy<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université Clermont Auvergne, Institut Pascal, CNRS-UCA-SIGMA, BP 10448, F 63000 Clermont Ferrand, France

<sup>2</sup> Centre des Hautes Etudes de la Construction, 94110 Arcueil, France

<sup>3</sup> Université Libanaise, Faculté de Génie II, Liban

*RÉSUMÉ.* Le principe de la précontrainte totale vise à maintenir le béton dans un état de compression sous charges extrêmes de service. Apparue plus tardivement, la précontrainte partielle admet la décompression voire la fissuration du béton. Des aciers passifs sont alors nécessaires pour maîtriser la fissuration et la section se comporte comme une section de béton armé. Dans ce cadre, le présent article propose une règle des pivots, comme en béton armé, pour définir le domaine admissible de la force de précontrainte et de son excentricité. Cette règle peut être utilisée en précontrainte partielle comme en précontrainte totale : dans les deux cas, la représentation graphique associée met en évidence les valeurs de la précontrainte critique et sur-critique. Un exemple de section de poutre en forme de T à talons est étudié. Les résultats montrent une réduction très significative de la valeur de la force de précontrainte dans le cas de la précontrainte partielle. Comme le béton doit rester comprimé sous charges permanentes et charges de service de longue durée, il convient d'adapter cette représentation à l'analyse simultanée de plusieurs états limites.

*ABSTRACT.* The concept of full prestressing is to maintain the concrete in a compression state at service loading. Later on, came the principle of partial prestressing allowing the decompression of concrete and a certain amount of cracking at service state. Conventional rebars are then required for crack control and the section will behave as a reinforced concrete section. In this framework, the present article proposes a pivot rule, similar to the one in reinforced concrete, in order to define the permissible domain of the prestressing force and the corresponding eccentricity. This rule can be used in partial and total prestressing: in both cases, a graphical representation illustrates the values of critical and over-critical prestressing force. For instance, a T-shaped section with heels is studied. The obtained results show a significative reduction in the prestressing force in the case of partial prestressing. However, since the concrete should remain in compression under dead loads and long term service loading, this representation shall be adopted to deal with several limit states simultaneously.

*MOTS-CLÉS :* Précontrainte partielle, Règle des pivots, T avec talons

*KEY WORDS :* Partial prestressing, Pivot rule, T-shaped heels, Passive steel reinforcement

### 1. Introduction

L'idée fondamentale du béton précontraint consiste à créer un état initial de contrainte tel que le béton reste comprimé pendant toute la durée de service. Les charges correspondant à la combinaison caractéristique étant en réalité rarement atteintes, la notion de précontrainte partielle s'est développée progressivement : il s'agit de faire en sorte que le béton reste comprimé sous charges permanentes tout en autorisant la traction voire la fissuration sous charges variables de courte durée. Cette méthode est de plus en plus adoptée dans la pratique de l'ingénierie en raison de ses multiples avantages en termes de ductilité, de limitation du fluage et d'économie d'investissement [NIL 77].

En précontrainte partielle, les armatures passives longitudinales contribuent non seulement au respect des critères de l'état limite ultime mais également à la maîtrise de la fissuration. De nombreux chercheurs ont mis au point des méthodes de dimensionnement. Karayannis et Chalioris [KAR 12] ont calculé la valeur de la tension dans les armatures passives d'une section fissurée pour différents pourcentages d'armatures passives. Dilger et Suri [DIL 86] ont proposé un calcul direct de la contrainte dans l'acier passif en supposant que les armatures

passives et actives sont suffisamment proches pour que la force de décompression agisse au niveau des aciers de précontrainte. Sindjic Grebovic [SIN 12] présente une analyse de l'interdépendance entre l'ouverture des fissures, calculées selon l'EN 1992-1-1, et le niveau de précontrainte.

Le présent article propose une méthode de dimensionnement en précontrainte totale et partielle pour une poutre isostatique sous combinaison caractéristique à l'ELS selon l'Eurocode 2 [EC2 05]. La vérification des conditions d'ouverture de fissure peut être obtenue soit par un calcul direct soit par une condition de contrainte sur les armatures passives. Un exemple numérique est développé pour une section en T avec talons.

## 2. Section totalement précontrainte

### 2.1. Conditions de contraintes

L'état-limite de service est caractérisé par les valeurs extrêmes du moment et les critères de contrainte associés. On notera :

- $M_{\min}$  et  $M_{\max}$  les valeurs minimales et maximales du moment et  $\Delta M$  leur différence;
- $\sigma_{\text{sup}}$  et  $\sigma_{\text{inf}}$  les contraintes respectives sur les fibres supérieure et inférieure du béton ;
- $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}_2$  les limites respectives de contraintes en fibre supérieure sous  $M_{\min}$  et  $M_{\max}$ ;
- $\bar{\sigma}_3$  et  $\bar{\sigma}_4$  les limites respectives de contraintes en fibre inférieure sous  $M_{\min}$  et  $M_{\max}$ ;

Les conditions sur les contraintes se traduisent par les inégalités suivantes :

$$\bar{\sigma}_1 \leq \sigma_{\text{sup}}(M_{\min}) \leq \sigma_{\text{sup}}(M_{\max}) \leq \bar{\sigma}_2 \quad [1]$$

$$\bar{\sigma}_4 \leq \sigma_{\text{inf}}(M_{\max}) \leq \sigma_{\text{inf}}(M_{\min}) \leq \bar{\sigma}_3 \quad [2]$$

En l'absence de fissuration, la relation entre sollicitations et contraintes est linéaire et la variation des contraintes entre  $M_{\min}$  et  $M_{\max}$  est proportionnelle à  $\Delta M$ .

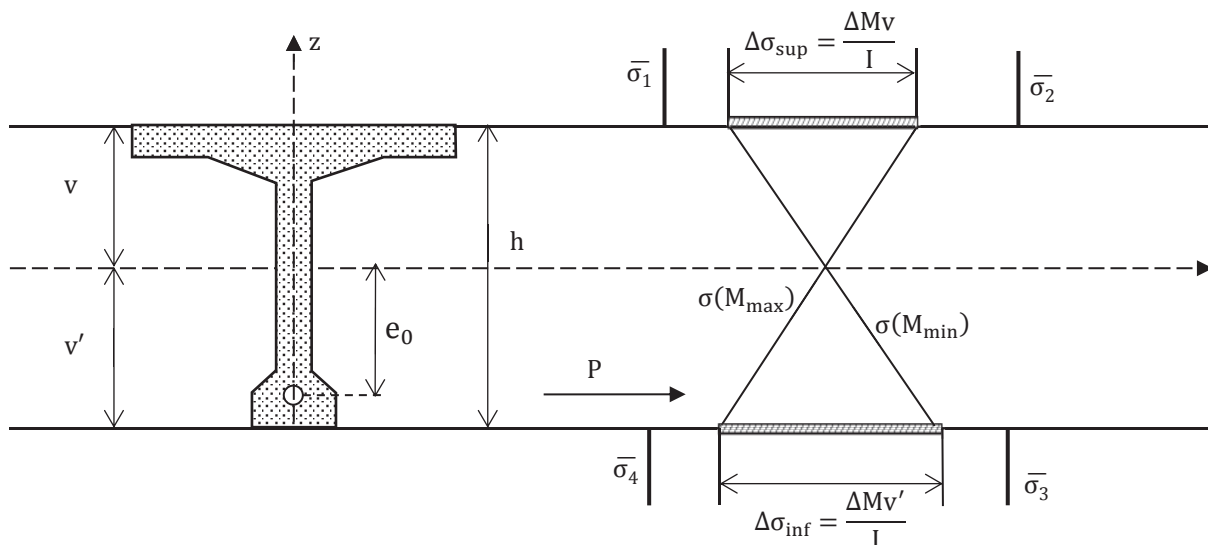


Figure 1. *Diagramme des contraintes et conditions de coffrage*

C'est ainsi que l'on obtient les conditions de coffrage :

$$\frac{\Delta M v}{I} \leq \bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 \quad \frac{\Delta M v'}{I} \leq \bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4$$

### 2.2. Fuseau de passage et domaine des couples (P, e<sub>0</sub>) admissibles

En exprimant la linéarité des contraintes et en multipliant les inégalités [1] et [2] respectivement par  $I/v$  et  $I/v'$ , on fait apparaître les écarts  $m_1$  entre le moment sollicitant et la valeur du moment pour lequel, en l'absence de précontrainte, une contrainte limite est atteinte. Ainsi nous obtenons les relations ci-dessous en fibres supérieure et inférieure respectivement :

$$m_1 = \frac{\bar{\sigma}_1 I}{v} - M_{\min} \leq P(\rho v' + e_0) \leq \frac{\bar{\sigma}_2 I}{v} - M_{\max} = m_2$$

$$m_4 = \frac{\bar{\sigma}_4 I}{v'} + M_{\max} \leq P(\rho v - e_0) \leq \frac{\bar{\sigma}_3 I}{v} + M_{\min} = m_3$$

Lorsque la précontrainte est positive, on obtient 4 valeurs limites de l'excentricité du câble :

$$e_1 = \frac{m_1}{P} - \rho v' \leq e_0 \leq \frac{m_2}{P} - \rho v' = e_2 \quad e_3 = \rho v - \frac{m_3}{P} \leq e_0 \leq \rho v - \frac{m_4}{P} = e_4$$

Ces valeurs d'excentricité  $e_i$  définissent dans le plan  $(P, e_0)$  un domaine limité par 4 hyperboles associées chacune à une condition de contrainte :  $e_1, e_2$  aux limites de contrainte en fibre supérieure et  $e_3, e_4$  aux limites de contrainte en fibre inférieure. Le signe de  $m_i$  détermine la position des hyperboles par rapport à leurs asymptotes horizontales qui sont tangentes au noyau central. Ce domaine a 4 sommets définis par les points suivants :

$$P_A(e_1 = e_4) \quad P_B(e_1 = e_3) \quad P_C(e_2 = e_3) \quad P_D(e_2 = e_4)$$

Lorsque les conditions de coffrage sont satisfaites

$$P_A \leq P_B \leq P_C \quad P_A \leq P_D \leq P_C$$

Une condition d'existence de la ligne de précontrainte est que  $P \geq P_A$  valeur définie comme sous-critique, et notée  $P_I$ .

$$P_I = \frac{m_1 + m_4}{\rho h} \quad [ 3 ]$$

Notons par  $c$  et  $c'$  les limites d'enrobage du câble, il convient de vérifier les inégalités suivantes :

$$-(v' - c') \leq e_0 \leq v - c$$

Lorsque l'excentricité associée à  $P_I$  ne respecte pas ces conditions, on recherchera l'intersection de l'hyperbole  $e_4$  avec la limite d'enrobage pour obtenir la valeur sur-critique de la précontrainte, notée  $P_{II}$

$$P_{II} = \frac{m_4}{\rho v + v' - c'} \quad [ 4 ]$$

### 2.3. Règle des pivots

On peut se déplacer sur le contour ABCD du domaine admissible en suivant successivement chacune des branches d'hyperbole :  $e_1$  de  $P_A$  à  $P_B$  puis  $e_3$  de  $P_B$  à  $P_C$ ,  $e_2$  de  $P_C$  à  $P_D$  et enfin  $e_4$  de  $P_D$  à  $P_A$ . Une seule contrainte est satisfaite exactement sauf aux points d'intersection où deux contraintes sont satisfaites. A l'intérieur du domaine, aucune contrainte limite n'est atteinte.

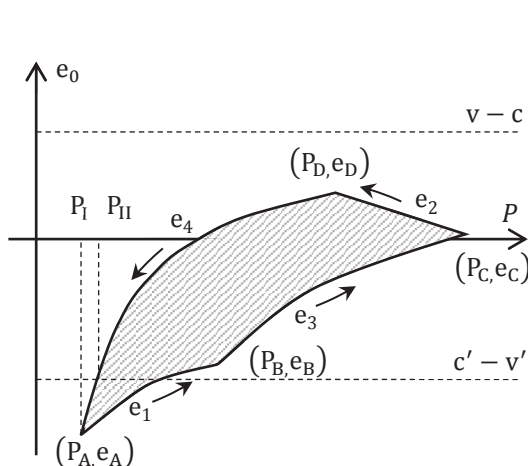


Figure 2. Domaine admissible des couples  $(P, e_0)$

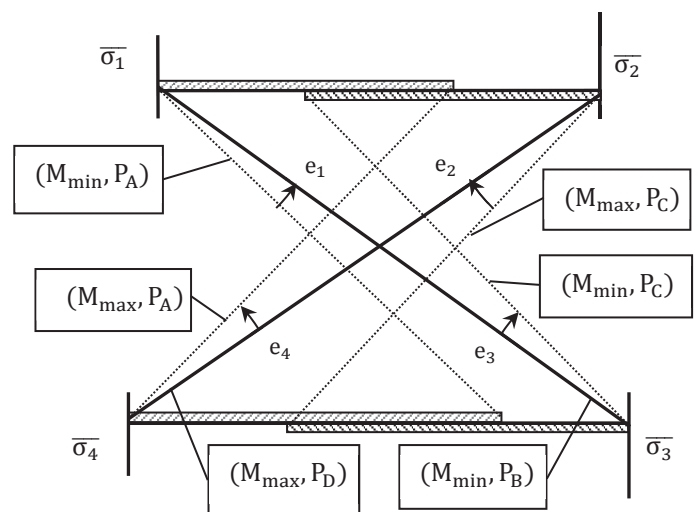


Figure 3. Plan des contraintes admissibles

La figure 3 représente l'évolution du diagramme des contraintes lors du parcours du contour de la zone admissible des valeurs  $(P, e_0)$ . Comme en béton armé, on fait ainsi apparaître des pivots si ce n'est qu'ici il s'agit d'une limite de contrainte et non de déformation.

### 3. Section partiellement précontrainte

Tant que la contrainte de traction dans le béton reste inférieure à la résistance, le schéma précédent reste applicable. Dans le cas contraire, il conviendra de limiter soit la contrainte dans les armatures tendues, soit l'ouverture des fissures. La méthode suivante propose d'examiner ces deux cas en se basant sur la méthode des pivots exposée ci-dessus. On s'intéresse prioritairement à la limite de traction en fibre inférieure et on fixe tout d'abord une limitation à la contrainte dans l'acier passif.

#### 3.1. Equilibre des efforts

Négligeant les contraintes de traction dans le béton, l'équilibre de la section est analysé comme en béton armé en supposant que les sections planes avant flexion restent planes après flexion et en prenant pour paramètre la position de l'axe neutre par rapport à la fibre supérieure et la contrainte sur la fibre supérieure du béton. Les équations d'équilibre sont données par :

$$\sigma_{st} = \alpha_e \frac{d-x}{x} \sigma_c \quad P = \frac{\sigma_c}{x} \int_0^x (x-s) ds - A_{st} \sigma_{st} \quad M + P(e_0 + d - v) = \frac{\sigma_c}{x} \int_0^x (x-s)^2 ds$$

#### 3.2. Domaine admissible des couples $(P, e_0)$

S'agissant de la limitation des tractions en fibre inférieure, seuls les pivots 2 et 4 associés au moment maximal sont affectés. La contrainte limite dans l'acier passif est notée  $\bar{\sigma}_{st}$ .

Au pivot 2, la contrainte dans la fibre supérieure du béton est fixée. La position de l'axe neutre pour laquelle la limite de traction dans l'armature est atteinte, est définie par :

$$\frac{x}{d} = \frac{\alpha_e \bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_{st} + \alpha_e \bar{\sigma}_2}$$

Au-delà de ce point, on ne peut plus continuer à remonter la position de l'axe neutre en conservant la contrainte sur la fibre supérieure du béton. Néanmoins, cela est possible en conservant la contrainte dans l'armature tendue et en diminuant la contrainte sur le béton. Il s'agit d'un nouveau pivot numéro 4 que l'on peut suivre tant que la contrainte en fibre supérieure sous moment minimal restera supérieure à la valeur limite  $\bar{\sigma}_1$ .

Il reste alors à rejoindre le domaine de la précontrainte totale en suivant l'hyperbole  $e_1$

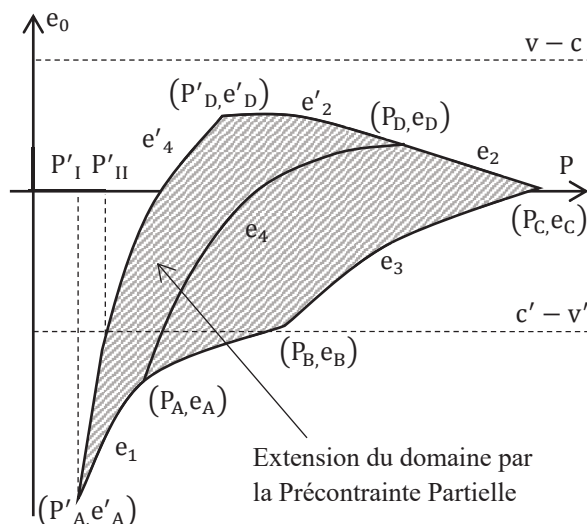


Figure 4 – Domaine admissible en précontrainte partielle

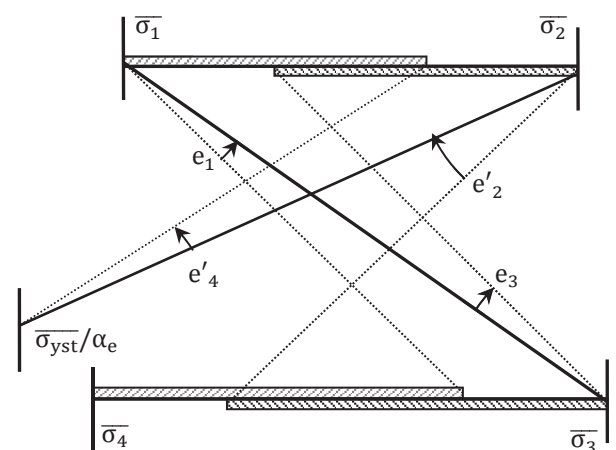


Figure 5 – Règle des pivots

On définit ainsi une nouvelle valeur sous-critique de la force de précontrainte. Dans le cas où l'excentricité associée ne satisfait pas aux conditions d'enrobage, la valeur sur-critique est obtenue en cherchant l'intersection

du pivot 4' avec la condition d'enrobage. Pour compléter cette analyse, il reste à examiner l'incidence de la fissuration sur les conditions de coffrage.

### 3.3. Ouverture des fissures et contrainte au niveau des aciers passifs

Selon l'Eurocode 2 [EC2 05], l'ouverture des fissures est donnée par la formule :

$$w_k = S_{r,max}(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad [5]$$

Où :  $w_k$  est l'ouverture de la fissure,  $S_{r,max}$  est l'espacement maximale des fissures  
 $\varepsilon_{sm}$  et  $\varepsilon_{cm}$  sont les déformations moyennes respectives de l'armature et du béton entre les fissures

L'écart des déformations moyennes de l'acier et du béton fait intervenir une hauteur efficace définie par :

$$h_{c,eff} = \min\{2,5(h - d); (h - x)/3; h/2\}$$

Tant que l'axe neutre est situé en dessous de la fibre supérieure, la limitation à  $h/2$  ne peut être prépondérante et on constate qu'il existe une valeur  $x_0$  en dessous de laquelle la hauteur est limitée par la première condition.

$$x < x_0 = 7.5d - 6.5h \Rightarrow h_{c,eff} = 2.5(h - d) \quad [6]$$

Dans ce cas, qui représente la situation la plus courante, il est équivalent de limiter l'ouverture de fissure ou bien la contrainte sur l'acier passif à la valeur suivante

$$\bar{\sigma}_{st} = \text{minimum} \left\{ \frac{5 E_s w_k}{3 S_{r,max}} ; \frac{E_s w_k}{S_{r,max}} + \alpha_e K_t f_{ct} \left( 1 + \frac{A_{c,eff}}{\alpha_e A_{st}} \right) \right\} \quad [7]$$

Dans les autres cas, il est aussi possible, la contrainte sur le béton en fibre supérieure sous moment maximal étant fixée, de déterminer la position de l'axe neutre pour laquelle la limite d'ouverture de fissure est atteinte.

## 4. Section en T à talons

Considérons l'exemple d'une section en T symétrique à talon avec goussets aux raccords de la semelle supérieure et du talon. Les aciers passifs étant pris en compte, le calcul est effectué en section homogénéisée.

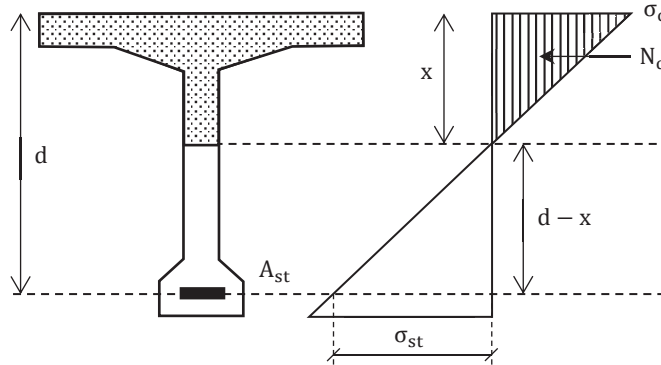


Figure 6 - Equilibre d'une section partiellement précontrainte

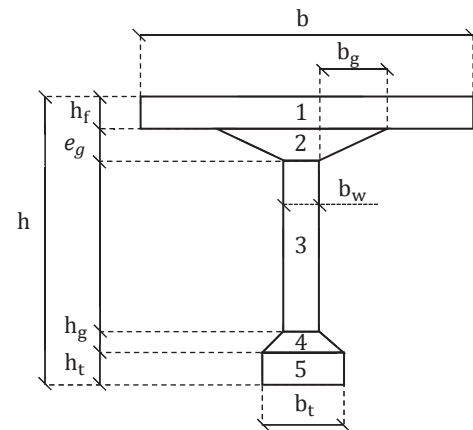


Figure 7 - Section divisée en 5 éléments

### 4.1. Propriétés géométriques de la section

La largeur étant linéairement variable par morceaux, les caractéristiques géométriques par rapport à la fibre supérieure sont des polynômes continus définis par morceaux (de degré 2 pour l'aire  $A(x)$ , 3 pour le moment statique  $S_{oy}(x)$  et 4 pour le moment d'inertie  $I_{oy}(x)$ )

Les intégrales qui interviennent dans les équations d'équilibre sont également des polynômes

$$\int_0^x (x-s) ds = xA(x) - S_{oy}(x) \quad \int_0^x (x-s)^2 ds = x^2 A(x) - 2xS_{oy}(x) + I_{oy}(x)$$

On peut ainsi déterminer la précontrainte  $P$  et son excentricité  $e_0$  en fonction de la position de l'axe neutre (pivot 2') ou de la contrainte en fibre supérieure du béton (pivot 4') sous moment maximal. Les branches  $e'_2, e'_4$  de la courbe limite ne sont pas des hyperboles mais des courbes définies de manière paramétrique.

#### 4.2. Résultats numériques

Le tableau suivant précise les données du cas étudié en termes de géométrie, caractéristiques des matériaux et de sollicitations. Les aciers passifs sont de diamètre 25 mm et leur enrobage  $C_p$  est plus faible que celui des câbles. Dans cet exemple, quatre cas sont traités : le premier en précontrainte totale et les autres cas en précontrainte partielle avec des taux de ferrailage de 0.5%, 1% et 1.5%

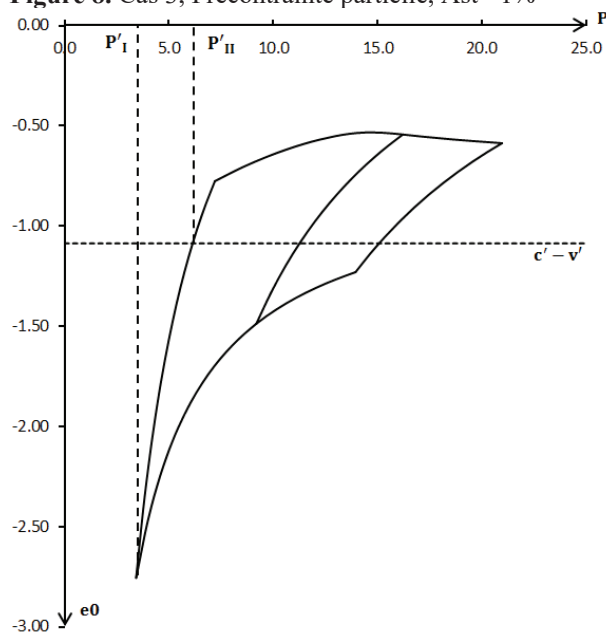
Tableau 1. Données

Géométrie		Contraintes Limites	
b	2 m	$\bar{\sigma}_1$	-2 MPa
h	2.5 m	$\bar{\sigma}_2$	24 MPa
$b_w$	0.24 m	$\bar{\sigma}_3$	24 MPa
$h_f$	0.16 m	$\bar{\sigma}_4$	0 MPa
$b_t$	0.8 m	$W_k$	2 mm
$h_t$	0.4 m	<b>Matériau</b>	
$h_g$	0.2 m	$f_{ck}$	40 MPa
$b_g$	0.4 m	$f_{ct,eff}$	3.5 MPa
$e_g$	0.2 m	$E_s$	200 GPa
<b>Enrobage</b>		$\alpha_e$	5.70
c	0.2 m	<b>Sollicitations</b>	
$c'$	0.2 m	$M_{min}$	2 MN.m
$c_p$	0.04 m	$M_{max}$	12MN.m

Tableau 2. Résultats

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
$A_{st}(\%)$	0	0.5	1	1.5
$\bar{\sigma}_{st}(\text{MPa})$	0	197	238	257
$P(\text{MN})$	12.20	8.03	6.12	4.15

Figure 8. Cas 3, Précontrainte partielle,  $A_{st} = 1\%$



La prise en compte des aciers passifs permet une réduction significative de la force de précontrainte pouvant atteindre 60 % pour un pourcentage géométrique d'armatures passives de 1,5 %. Ce résultat est admis sous réserve de vérification des autres états limites dans lesquels la fissuration ne sera pas admise ; ELS fréquent ou quasi-permanent.

#### 5. Conclusion

L'approche présentée dans ce travail permet une représentation concrète du domaine des solutions ( $P, e_0$ ) admissibles en précontrainte totale et partielle et permet à l'ingénieur de situer les solutions obtenues dans les calculs usuels par rapport aux contraintes limites. La prise en compte de plusieurs états limites ne présente pas de difficulté, pourvu que l'on définisse, pour chacun d'entre eux, la variation de la force de précontrainte par rapport à sa valeur à la mise en service. La prochaine étape de ce travail de recherche consistera à inclure les justifications aux ELU.

#### 6. Bibliographie

[DIL 86] DILGER W.H., SURI K.M., « Steel stresses in Partially Prestressed Concrete Members », *PCI Journal*, vol. 31, n° 3, 1986, p. 88-112.

[EC2 05] EUROCODES., *NF EN 1992-1-1*, AFNOR, 2005.

[KAR 13] KARAYANNIS C.G., CHALIORIS C.E., « Design of partially prestressed beams based on the cracking control provisions », *Engineering Structures*, vol. 48, 2013, p. 402-416.

[NIL 77] NILSON A.H., « Flexural Stresses after Cracking in Partially Prestressed Beams », *PCI Journal*, vol. 21, n° 4, 1977, p. 72-81.

[SIN 12] SINDJIC-GREBOVIC R., « Stresses in prestressing steel of partially prestressed element with cracks », *INDIS*, Serbia, 2012.