
Concevoir des structures à double courbure avec les surfaces Weingarten-Linéaires

Tellier Xavier

Laboratoire Navier (Ecole des Ponts ParisTech, IFSTTAR, CNRS), Marne-la-Vallée, France

Université Paris-Est, Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, Marne-la-Vallée, France

Email : xavier.tellier@enpc.fr

RÉSUMÉ. Les structures à double courbure telles que les membranes tendues et les gridshells allient performance mécanique et élégance architecturale. La recherche de forme de ces structures peut être complexe, et fait l'objet d'un arbitrage entre efficacité mécanique, facilité de fabrication et esthétique. Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode de recherche de forme basée sur la génération de surfaces dites Weingarten linéaires elliptiques. Ces surfaces ont la propriété notable d'être à l'équilibre membranaire sous charge de pression uniforme, et ce avec un alignement des contraintes principales avec les directions de courbure principales. Notre méthode permet une génération de forme simple et rapide de ces surfaces à bord imposé. Elle offre un retour immédiat des efforts de prétension dans le cas de membrane, et des efforts sous chargement de pression uniforme dans le cas d'une coque ou d'un gridshell, et peut donc être particulièrement utile en phase de prédimensionnement. Pour un gridshell, elle permet également de trouver des formes alliant simplicité de fabrication et performance mécanique.

ABSTRACT. Freeform structures such as membranes and gridshells combine structural efficiency with architectural elegance. The form-finding of these structures is complex, and is the result of a compromise between structural performance, fabricability and aesthetic. In this article, we propose a novel form-finding method based on the generation of the so-called Linear Weingarten surfaces. These surfaces naturally correspond to equilibrium shapes of membranes under uniform pressure. Furthermore, under this type of loading, principal curvature and stress directions are aligned. Our method allows for a simple generation of these surfaces on a target boundary. It offers an immediate feedback on the expected internal stresses in the case of a tensile membrane, and on the stresses under constant pressure in the case of a shell. One notable application is the design of gridshells, for which ease of fabrication and mechanical performance can be combined.

MOTS-CLÉS : Membranes tendues, coques, géométrie architecturale, surfaces minimales, géométrie différentielle

KEY WORDS: Architectural geometry, membranes, shells, minimal surfaces, differential geometry

1. Introduction

Depuis quelques décennies, les enveloppes architecturales à double courbure se sont multipliées. La figure 1 montre par exemple trois structures récentes en France : le centre Pompidou Metz (2010), la Cité du Vin à Bordeaux (2016), et la Fondation Louis Vuitton (Boulogne, 2016).

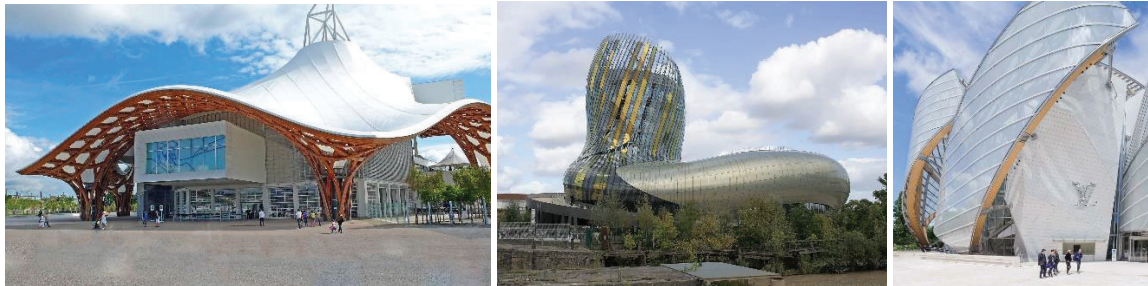


Figure 1. De gauche à droite : Centre Pompidou (Metz), Cité du Vin (Bordeaux), Fondation Vuitton (Boulogne)

Les structures à double courbure sont attractives pour plusieurs raisons. Tout d'abord, ce sont des formes expressives, qui permettent de donner un caractère unique à un édifice. Aussi, les formes courbes peuvent être d'une exceptionnelle efficacité mécanique. Un exemple est le voile béton du CNIT (Puteaux), qui couvre une portée de 52m avec une épaisseur de seulement 8cm.

Deux types de structures sont particulièrement populaires pour construire une enveloppe à double courbure : les gridshells et les membranes tendues. Le début de l'exploration du potentiel formel des membranes tendues à double courbure s'est beaucoup fait par l'étude des surfaces minimales. Ces surfaces, nommées ainsi car elles atteignent un minimum d'aire à bord prescrit, correspondent à la forme naturellement prise par un film de savon à l'équilibre sans chargement extérieur. Un vaste programme expérimental avait été lancé par l'équipe de Frei Otto (Bach, Burkhard, and Otto 1988) afin d'explorer les formes possibles. Ces travaux ont en particulier débouché sur la conception de structures iconiques telles que le stade Olympique de Munich, ainsi que de nombreuses toiles tendues Figure 2.

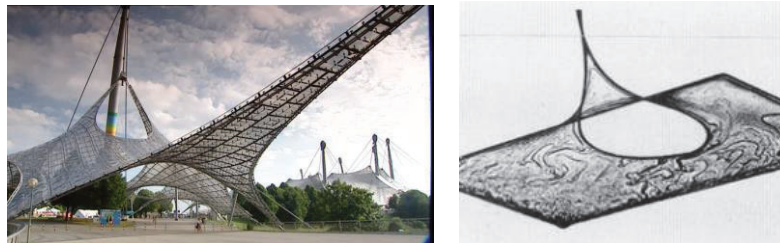


Figure 2. Gauche : Stade olympique de Munich. Droite : un film de savon est une surface minimale (© ILEK).

Les surfaces minimales font partie d'une famille de surfaces plus large : les surfaces à courbure moyenne constante (CMC). Ces surfaces sont les formes à l'équilibre de film de savon ayant une différence de pression entre intérieur et extérieur. Ces formes ont également suscité un grand intérêt chez les designers, car elles sont harmonieuses, peuvent être construites sur une courbe fermée, et ont de bonnes propriétés mécaniques. De nombreux projets de Frei Otto les ont utilisées, telles que le Unite Pneu ou le Airhall de l'Expo64.

Les surfaces CMC appartiennent elles-mêmes à une famille plus large : les surfaces Weingarten-Linéaires (WL), qui sont le sujet de cet article. Ces surfaces ont par définition la propriété qu'une combinaison linéaire de leur courbure moyenne et de leur courbure gaussienne est constante :

$$aH + bK = c \quad / \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad [1]$$

Les courbures moyenne (H) et Gaussienne (K) en un point donné d'une surface sont définies respectivement comme la moyenne et le produit des courbures maximales et minimales en ce point.

Les surfaces WL ont été beaucoup étudiées en géométrie différentielle. Ces études ont révélé des propriétés mécaniques notables, ainsi qu'une riche structure géométrique, qui seront décrites en section 2. Cependant, leur application au design, et en particulier à la conception de structures à double-courbure, n'ont à notre connaissance jamais été explorées. Surtout, aucune méthode de construction générale de ces surfaces n'a été développée. Nous

proposons donc en section 3 une méthode de génération de ces surfaces, basée sur un nouveau modèle discret. Enfin, en section 4, nous proposons des applications de notre méthode pour la recherche de forme d'enveloppes légères, en particulier les membranes tendues et les gridshells.

2. Propriétés

Le travail de (Rogers and Schief 2003) permet de montrer qu'une coque dont la surface de référence est WL est à l'équilibre membranaire sous un chargement de pression uniforme. De plus, les contraintes membranaires généralisées sont dans ce cas connues de façon explicite, et ont la particularité d'être alignées avec les directions de courbure principales. En supposant que la pression appliquée est c et que la surface vérifie [1] (quitte à multiplier ses coefficients par une même constante), les contraintes généralisées sont :

$$N_{11} = a + \frac{b}{2}k_2 ; N_{12} = 0 ; N_{22} = a + \frac{b}{2}k_1 \quad [2]$$

Où les directions 1 et 2 sont les directions de courbure principales, et k_1, k_2 les courbures normales associées.

L'équation [1] est une équation différentielle du second ordre sur les coordonnées de la surface. (Hopf 1983) a montré que si $a^2 + bc > 0$, cette équation est elliptique – la surface étant alors appelée *WL elliptique*. On peut dans ce cas trouver une ou plusieurs solutions au problème de Dirichlet : construire une surface Weingarten linéaire sur un contour donné. Cela est par exemple le cas pour les surfaces minimales et CMC, qui vérifient cette condition étant donné qu'elles satisfont $b = 0$.

3. Génération

3.1. Modèle discret

Pour générer des surfaces WL numériquement, il est nécessaire de les discrétiser afin de manipuler un nombre fini de degrés de liberté. Nous utilisons une discrétisation par un maillage, c'est-à-dire un ensemble de sommets reliés par des arêtes et des faces. Une telle discrétisation a déjà été proposée dans (Burstall, Hertrich-Jeromin, and Rossman 2014). Cependant, celle-ci se fait par quadrangles alignés avec les lignes de courbure. Ce type de modèle est mal adapté à un problème de Dirichlet, car elle nécessite la connaissance des lignes de courbure avant même de construire la surface. Nous proposons donc un modèle discret par des maillages à faces triangulaires, dont les arêtes n'ont pas besoin de suivre une direction particulière.

Similairement à la discrétisation des surfaces CMC proposées par (Polthier and Rossman 2002) et (Pan et al. 2012), nous proposons une définition variationnelle des surfaces WL discrètes. Nous utilisons pour cela la propriété suivante des surfaces WL, prouvée par (Reilly 1973) : les surfaces WL sont les points critiques de la fonctionnelle [3], qui fait intervenir l'aire de la surface, le volume sous la surface, et sa courbure moyenne totale – c'est-à-dire l'intégrale de la courbure moyenne sur toute la surface :

$$E(S) = \frac{a}{2} \text{Aire}(S) + bH_{\text{tot}}(S) + c\text{Vol}(S) \quad [3]$$

Nous proposons ainsi la définition suivante des surfaces WL discrètes :

Définition : Un maillage triangulaire T à bord fixe est dit Weingarten linéaire si la position de ses sommets est telle que T est un point critique de la fonctionnelle suivante :

$$E_1(T) = \frac{a}{2} \text{Aire}(T) + bH_{\text{tot}}(T) + c\text{Vol}(T) \quad [4]$$

C'est-à-dire qu'en chaque sommet P du maillage :

$$\nabla_p E_1(T) = \frac{a}{2} \nabla_p \text{Aire}(T) + b \nabla_p H_{\text{tot}}(T) + c \nabla_p \text{Vol}(T) = 0 \quad [5]$$

Où $\text{Aire}(T)$ et $\text{Vol}(T)$ sont respectivement l'aire du maillage (i.e. la somme des aires de chaque face) et le volume sous le maillage. H_{tot} désigne la courbure moyenne totale du maillage.

Il existe différents modèles de courbure moyenne discrète pour un maillage. Nous choisissons celui proposé par (Cohen-steiner and Morvan 2006), dans lequel la courbure est définie sur les arêtes :

$$H_{\text{tot}} = \sum_{\text{arêtes } e} H(e) = \sum_{\text{arêtes } e} \|\vec{e}\| \theta_e$$

Où θ_e est l'angle diédral de l'arête e , c'est-à-dire l'angle entre les normales des faces adjacentes (voir Figure 3) et $\|\vec{e}\|$ sa longueur.

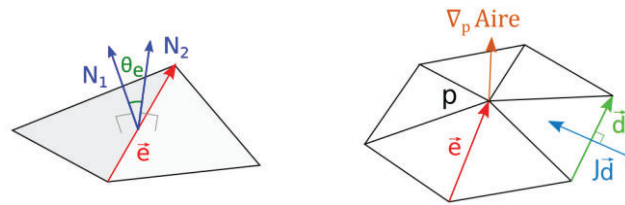


Figure 3. Gauche : angle diédral d'une arête. Droite : étoile d'un sommet p et gradient de l'aire du maillage par rapport à la position de ce sommet

3.2. Génération

Nous construisons les maillages WL par minimisation algorithmique, similairement aux méthodes utilisées par (Brakke 1992) et (Pan et al. 2012) pour générer des maillages triangulaires CMC. Nous effectuons cette minimisation sur la fonctionnelle E_2 suivante :

$$E_2(T) = \lambda \text{Aire}^2(T) + b H_{\text{tot}}(T) + c \text{Vol}(T) \quad [6]$$

L'utilisation d'une aire au carré est inspirée de (Pan et al. 2012). Nous remarquons tout d'abord qu'un point critique de E_2 est également un point critique de E_1 :

$$\begin{aligned} \nabla_p E_2(T) &= \lambda 2 \text{Aire}(T) \nabla_p \text{Aire} + b \nabla_p H_{\text{tot}}(T) + c \nabla_p \text{Vol}(T) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2} \nabla_p \text{Aire}(T) + b \nabla_p H_{\text{tot}}(T) + c \nabla_p \text{Vol}(T) &= 0 \quad / \quad a = 4 \lambda \text{Aire}(T) \end{aligned}$$

L'intérêt d'utiliser cette fonctionnelle modifiée est que certains minima de E_2 sont des points critiques de E_1 sans en être des minima : ils deviennent donc accessibles par descente de gradient. Cela est par exemple le cas d'une grande calotte sphérique s'appuyant sur un cercle. Nous proposons donc de contrôler la forme par le biais du bord et des paramètres $(\lambda; b; c)$.

Le terme en H_{tot} de E_2 n'est pas présent dans les modèles de surface CMC, et constitue la différence majeur de cet article par rapport aux travaux sur les CMC. La variation de H_{tot} au 1^{er} ordre d'une surface est donnée par la courbure Gaussienne de la surface (Giaquinta and Hildebrandt 1996; Overgaard and Solem 2007). Or, (Zhao and Xu 2006) ont montré qu'un flot par courbure Gaussienne est instable, car il tend à amplifier certaines imperfections ou aspérités du maillage. Cependant, dans notre cas, la minimisation porte sur une combinaison de la courbure moyenne totale et de l'aire, et le terme en aire permet de rendre la fonctionnelle E_2 localement convexe. Cet effet est illustré sur la Figure 4, qui montre la variation de E_2 quand on déplace un sommet d'une sphère.

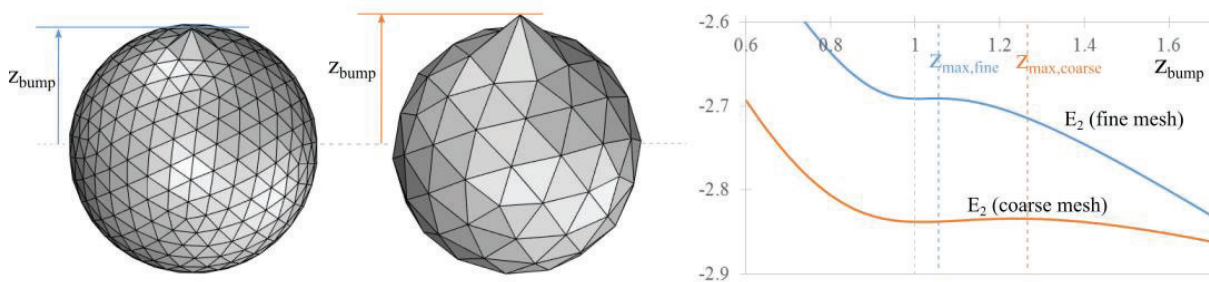


Figure 4. La fonctionnelle E_2 est localement convexe

Nous proposons de minimiser $E_2(T)$ par une descente de gradient avec recherche linéaire selon la règle d'Armijo. Les directions de descente données par le gradient conjugué ou BFGS, qui sont d'habitude plus performantes, se sont avérées moins stables pour notre fonctionnelle du fait de la très faible régularité du terme en H_{tot} .

Notre algorithme nécessite le calcul explicite du gradient de E_2 . Le gradient de l'aire et du volume d'une triangulation par rapport aux coordonnées (x, y, z) d'un sommet p du maillage sont des problèmes bien connus (voir

par exemple (Romon 2013)). Leur calcul fait intervenir l'étoile du sommet p , c'est-à-dire la portion de maillage constituée par les faces et sommets adjacents au point p :

$$\nabla_p \text{Vol}(T) = \frac{1}{3} \vec{A}_p \quad [7]$$

Où \vec{A}_p est l'aire-vecteur de l'étoile du sommet p .

$$\nabla_p \text{Aire}(T) = \frac{1}{2} \sum_{\text{arêtes } d} J \vec{d} \quad [8]$$

Où la somme est prise sur les arêtes \vec{d} formant le bord de l'étoile de p (voir Figure 3), et où J désigne la rotation de 90° selon le vecteur normal à la face contenant l'arête d et le sommet p .

Le gradient de la courbure moyenne totale n'est quant à lui pas présent dans la littérature. Les formules de dérivations des angles diédraux d'un maillage données dans (Wardetzky et al. 2007) permettent de le calculer. De nombreux termes se simplifient au cours de la dérivation, et l'on trouve la formulation suivante :

$$\nabla_p H_{\text{tot}}(T) = \sum_{\text{arêtes } e} \theta_e \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \quad [9]$$

Où la somme est prise ici sur les arêtes sortantes du sommet p .

L'initialisation de l'optimisation se fait par un maillage minimal, obtenu à l'aide du plugin Kangaroo2 MeshMachine pour RhinocerosTM. Ce maillage correspond à des coefficients $(\lambda; b; c) = (1; 0; 0)$. Puis, la variation progressive de ces coefficients permet au concepteur d'atteindre une forme qui lui convient. La minimisation est interrompue quand les déplacements deviennent suffisamment faibles.

3.3. Validation de la discrétisation

Afin de garantir que notre définition des maillages WL nous donne bien des maillages « proches » des surfaces WL, et donc que nous récupérons les propriétés mécaniques discutées en section 2.1, nous proposons deux méthodes de validation.

3.3.1 Convergence

La convergence de notre discrétisation vers des surfaces WL quand la taille des faces tend vers 0 peut être prouvée analytiquement pour les sommets de valence six. Par soucis de concision, cette preuve n'est pas incluse ici. De plus, on peut vérifier que notre méthode permet d'approcher des surfaces WL classiques, comme le maillage montré en Figure 5 qui est proche d'une surface développable ($K=0$). La capacité de notre méthode à générer des surfaces développables à contour imposée est remarquable, car ce problème n'a été résolu numériquement que relativement récemment (Rose et al. 2007).

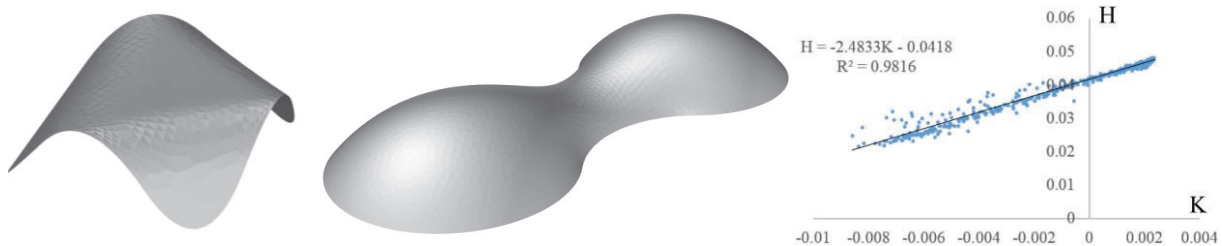


Figure 5. Validation de la discrétisation. Gauche : construction d'une surface développable. Milieu et droite : construction d'un maillage triangulaire WL et diagramme des courbures discrètes associé

3.3.2 Courbures discrètes aux sommets

De nombreux modèles de courbures moyennes et Gaussiennes pour un maillage ont été proposés en géométrie différentielle discrète. Sur la Figure 5, nous construisons un diagramme de courbure d'un maillage WL en traçant pour chaque sommet p du maillage un point de coordonnées (K_p, H_p) , où H_p et K_p sont respectivement la courbure moyenne discrète définies comme la norme du gradient de l'aire et la courbure Gaussienne discrète définie comme le défaut angulaire, chacun normalisé par le tiers de l'aire de l'étoile de p . Ces deux modèles faisant référence (voir

par exemple (Romon 2013)). Nous notons que la relation est quasi linéaire, avec un coefficient de corrélation de 0,99 (l'erreur de corrélation est causée par les sommet du maillage où un nombre différents de six arêtes se rejoignent ; ce problème est courant en géométrie différentielle discrète (Borrelli, Cazals, and Morvan 2003)).

4. Conception de membranes tendues

Les membranes tendues permettent de couvrir de vastes portées avec un très faible poids et un coût restreint. Autrefois réservées à des ouvrages temporaires tels que des chapiteaux de cirque, les récentes avancées techniques sur les matériaux permettent maintenant d'assurer leur pérennité jusqu'à plusieurs dizaines d'années. La Figure 6 montre par exemple un stade ainsi qu'un bassin de décantation utilisant ce type de couverture.



Figure 6. Envelopes constituées d'une membrane tendue. Gauche : Stade du Millenium à Londres. Droite : Bassin de décantation de Valenton (©Atelier AFA)

4.1. Méthodes existantes de recherche de forme de membrane autocontrainte

Les membranes n'ayant aucune raideur en dehors de leur plan, et leur poids étant négligeable devant les charges extérieures, leur forme est entièrement déterminée par leur bord et la répartition de la précontrainte (des câbles peuvent aussi être attachés pour modifier la forme). La conception de la géométrie d'une membrane tendue revient donc à déterminer ces paramètres. Il existe deux grandes familles de méthodes pour cela.

La première consiste à construire une surface minimale sur le bord voulu. Il existe de nombreux algorithmes simples d'utilisation pour générer une surface minimale. Ces algorithmes sont basés sur une minimisation de l'aire d'un maillage. Les formes obtenues correspondent à des membranes où la précontrainte est isotrope et uniforme. Ces surfaces sont efficaces mécaniquement, mais très limitées d'un point de vue formel.

La deuxième consiste à prescrire également les efforts de prétension, en utilisant des méthodes telles que les densités de force (Schek 1974), les éléments finis ou la stratégie de mise à jour de l'état de référence (Bletzinger et al. 2005). Ces méthodes permettent d'explorer l'ensemble des formes autocontraintes sur un bord donné, mais nécessitent plus de travail de la part du concepteur. L'orientation des efforts principaux doit être définie, des essais et erreurs doivent être effectués sur les valeurs de la prétension.

4.2. Membranes Weingarten Linéaires

Tel que discuté en section 2, les surfaces WL correspondent à des formes de membranes autocontraintes sans chargement extérieur dans le cas où $c=0$. Notre méthode de génération, expliquée en section 3, offre donc une nouvelle façon de générer des formes de membranes tendues. En posant $a=1$, ces surfaces vérifient :

$$H + bK = 0 \quad [10]$$

Un concepteur dispose donc d'un degré de liberté (le paramètre b) pour concevoir une surface WL sur un bord donné, contrairement aux surfaces minimales, qui sont entièrement déterminées par le bord : elles correspondent au cas particulier $b=0$. L'équation 2 montre que le paramètre b modifie le rapport de précontrainte entre les deux directions de courbure principales. La Figure 7 montre l'effet du paramètre b sur la forme d'une membrane sur un bord fixé.

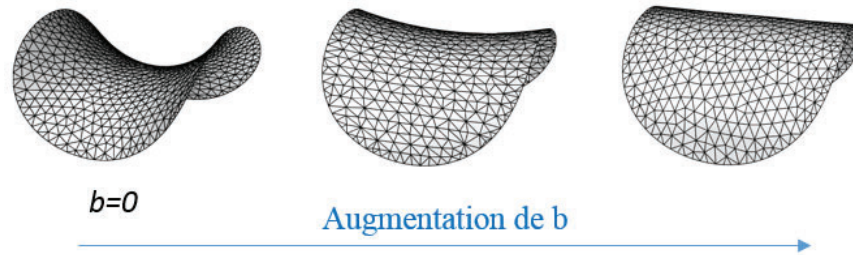


Figure 7. Surfaces WL générées sur même contour.

4.3. Choix du paramètre b

Le paramètre b permet de contrôler les aspects suivants, qui sont souvent critique pour la conception d'une membrane tendue.

4.2.1 Variation de la hauteur sous toile

En ajustant la valeur de b , on peut modifier la hauteur moyenne de la surface. On peut donc ajuster les volumes sous la toile pour les adapter à l'usage prévu par l'architecte. Cet effet est montré sur les Figure 9, où une surface minimale et une surface WL sont construites sur deux mêmes contours.

4.2.2 Eviter la formation de poches d'eau

Les membranes tendues doivent avoir une pente minimum pour empêcher la formation de poches d'eau dues à la pluie. Le paramètre b permet également de modifier cette pente maximale, comme illustré sur la Figure 9.

4.2.3 Formes plus expressives

Les surfaces minimales ont l'inconvénient d'avoir tendance à être relativement plate sur de grandes portions, comme la surface montrée sur la Figure 8. La déformation de ces surfaces en WL permet dans certains cas de leur redonner de la courbure et du caractère.

4.3.2 Stabilisation

La courbure Gaussienne d'une surface caractérise sa non-planéité. Si elle est trop faible, la surface est trop plate, et risque de battre sous l'action du vent. Le paramètre b permet de modifier la distribution de la courbure Gaussienne. Cet effet est montré sur la Figure 9.

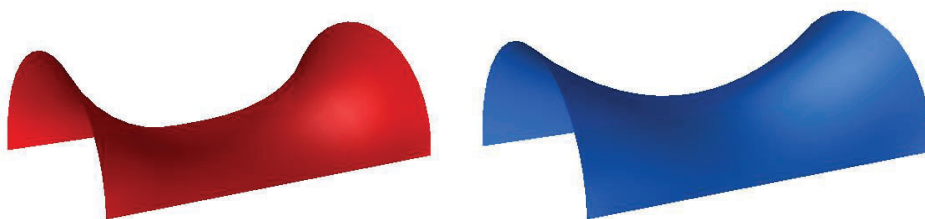


Figure 8. Gauche : Surface minimale, avec zone très plate au milieu. Droite : surface Weingarten Linéaire, où le paramètre b a permis d'uniformiser la courbure.

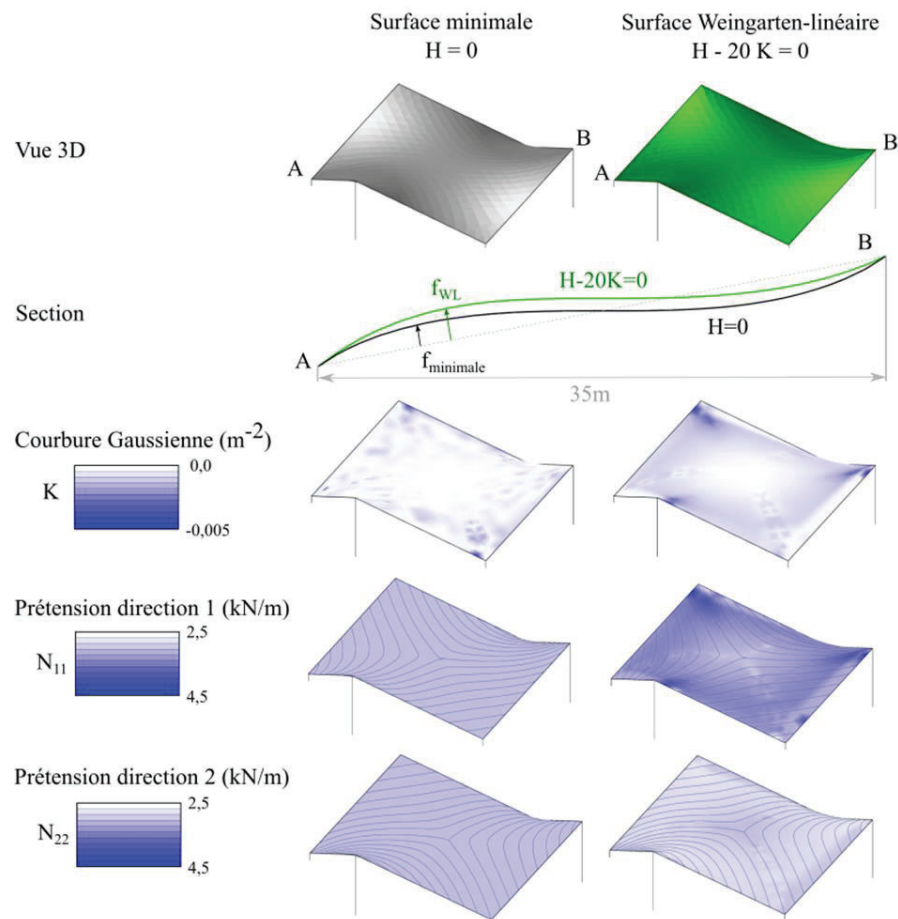


Figure 9. Comparaison de forme et de prétension entre une surface minimale et une surface WL sur un même contour

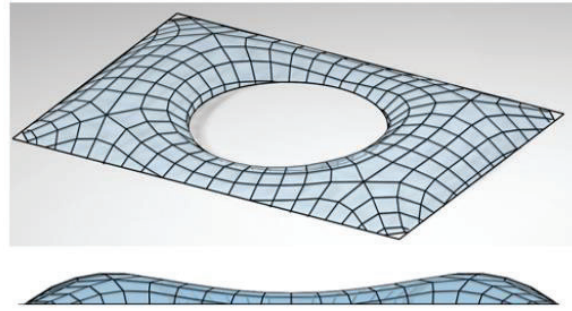
5. Conception de gridshells

Les gridshells sont des coques formées à partir d'une résille de poutres. Une méthode de construction courante est d'assembler des profilés métalliques en grille et de les recouvrir par des panneaux de verre, ce afin de former une enveloppe transparente à double courbure à partir d'éléments rectilignes et plans. Aligner les poutres avec les directions de courbure principales offre alors de nombreux avantages pour faciliter la fabrication (Pottmann et al. 2007) : la couverture peut se faire avec des panneaux de verre plans, seules quatre poutres se rencontrent au niveau des nœuds (contrairement aux maillages triangulaires), et les nœuds sont sans-torsion géométrique (voir Figure 10), c'est-à-dire que les plans médians des poutres se rencontrent sur un axe.

Sur les surfaces Weingarten linéaires, les lignes de courbure présentent un double avantage. Premièrement, elles forment un motif régulier, ce qui est rarement le cas sur une surface quelconque. Cela est dû au fait que ces surfaces sont en offset par rapport à une surface CMC (Eisenhart 1909). Deuxièmement, en régime membranaire et sous charge de pression uniforme, les directions de courbure sont alignées avec les directions de contraintes principales. Ainsi, les surfaces WL offrent des propriétés intéressantes pour la construction de ce type de structure : en y plaçant des poutres selon les directions de courbure principale, les poutres suivent une trame régulière, donc esthétique, les connexions entre poutres sont sans-torsion géométrique, et les poutres sont orientées de façon efficace par rapport aux efforts intérieurs. Cette dernière propriété peut permettre de remplacer les câbles de contreventement souvent utilisés sur ce type de projet par un encastrement des nœuds, méthode moins rigide, mais aussi moins coûteuse et plus esthétique. La figure 10 montre comment une surface Weingarten-linéaire peut être utilisée pour concevoir une structure alternative pour la grande verrière du British Museum à Londres, dont la géométrie est basée sur un maillage triangulaire sans propriété mécanique particulière. Les problèmes de torsion géométrique sur un maillage triangulaire sont montrés sur la figure 10, la fabrication d'un tel nœud est considérablement plus complexe que celle d'un nœud sans torsion.



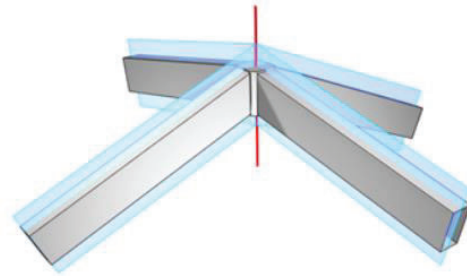
Verrière du British Museum.
La structure acier suit un maillage triangulaire.



Surface Weingarten-Linéaire sur le même contour,
avec poutres orientées selon les directions de courbure.



Nœud avec torsion
(Photo : Romain Mesnil)



Nœud sans torsion

Figure 10. Proposition d'une géométrie de gridshell alternative pour la grande verrière du British Museum, avec panneaux de couverture plans, nœuds sans torsions, et orientation des poutres parfaite pour une charge de vent uniforme.

6. Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté l'intérêt des surfaces Weingarten linéaires pour la conception de structures à double courbure. Ces surfaces, jusqu'ici cantonnées au domaine des mathématiques, présentent un intérêt d'un point de vue mécanique, de fabrication, et esthétique. Nous avons proposé une nouvelle méthode de génération de ces surfaces sur un bord imposé. Cette méthode est basée sur une nouvelle discrétisation de ces surfaces par des maillages triangulaires. Nous avons montré l'intérêt de ces surfaces par rapport aux surfaces minimales pour la conception de membranes tendues. L'étude permet une avancée dans la compréhension des formes de membranes autocontraintes, en faisant un particulier lien entre surfaces minimales et développables. Nous avons également proposé une application à la conception de gridshells. La méthode de génération proposée n'est pas destinée aux phases de conception détaillée, mais semble avoir un certain potentiel pour la recherche de forme en phase de projet préliminaire.

7. Remerciements

Ce projet a été financé par le Labex MMCD (<http://mmcd.univ-paris-est.fr/>). L'auteur souhaite remercier son équipe d'encadrement de thèse, Olivier Baverel, Cyril Douthe et Laurent Hauswirth.

8. Bibliographie

- Bach, K., B. Burkhard, and F. Otto. 1988. *IL18 Forming Bubbles*. Institute for Lightweight structures, University of Stuttgart.
- Bletzinger, Kai Uwe, Roland Wüchner, Feraß Daoud, and Natalia Camprubi. 2005. "Computational Methods for Form Finding and Optimization of Shells and Membranes." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (30–33 SPEC. ISS.): 3438–52. doi:10.1016/j.cma.2004.12.026.
- Borrelli, V., F. Cazals, and J. M. Morvan. 2003. "On the Angular Defect of Triangulations and the Pointwise Approximation

- of Curvatures.” *Computer Aided Geometric Design* 20 (6): 319–41. doi:10.1016/S0167-8396(03)00077-3.
- Brakke, Kenneth A. 1992. “The Surface Evolver.” *Experimental Mathematics* 1 (2): 141–65. doi:10.1080/10586458.1992.10504253.
- Burstall, F., U. Hertrich-Jeromin, and W. Rossman. 2014. “Discrete Linear Weingarten Surfaces,” 1–18. <http://arxiv.org/abs/1406.1293>.
- Cohen-steiner, David, and Jean-Marie Morvan. 2006. “Differential Geometry on Discrete Surfaces.” In *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*, 157–79. doi:10.1007/978-3-540-33259-6.
- Eisenhart, Luther Pfahler. 1909. *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Ginn and Company Proprietors, Boston USA.
- Giaquinta, Mariano, and Stefan Hildebrandt. 1996. *Calculus of Variations I - Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften 310*. Springer-Ver.
- Hopf, Heinz. 1983. *Differential Geometry in the Large, Lecture Notes in Math*. Edited by BerlinHeidelberg-New York.
- Overgaard, Niels Chr, and Jan Erik Solem. 2007. “The Variational Origin of Motion by Gaussian Curvature.” *International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, 430–41. doi:10.1007/978-3-540-72823-8.
- Pan, H, Y-K Choi, Y Liu, W Hu, Q Du, K Polthier, C Zhang, and W Wang. 2012. “Robust Modeling of Constant Mean Curvature Surfaces.” *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 31 (4): 11–85. doi:10.1145/2185520.2185581.
- Polthier, Konrad, and Wayne Rossman. 2002. “Discrete Constant Mean Curvature Surfaces and Their Index.” *Visualization and Mathematics*, 47--77.
- Pottmann, Helmut, Andreas Asperl, Michael Hofer, and Axel Kilian. 2007. *Architectural Geometry*. Bentley Institute Press.
- Reilly, Rc. 1973. “Variational Properties of Functions of the Mean Curvatures for Hypersurfaces in Space Forms.” *J. Differential Geom* 8: 465–77. doi:10.4310/jdg/1214431802.
- Rogers, C., and W. K. Schief. 2003. “On the Equilibrium of Shell Membranes under Normal Loading. Hidden Integrability.” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 459 (2038): 2449–62. doi:10.1098/rspa.2003.1135.
- Romon, Pascal. 2013. *Introduction À La Géométrie Différentielle Discrète*. Ellipses.
- Rose, Kenneth, Alla Sheffer, Jamie Wither, Marie-paule Cani, and Boris Thibert. 2007. “Developable Surfaces from Arbitrary Sketched Boundaries.” *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, 163–72.
- Schek, H. J. 1974. “The Force Density Method for Form Finding and Computation of General Networks.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3 (1): 115–34. doi:10.1016/0045-7825(74)90045-0.
- Wardetzky, Max, Miklos Bergou, David Harmon, Denis Zorin, and Eitan Grinspun. 2007. “Discrete Quadratic Curvature Energies.” *Computer Aided Geometric Design* 24 (8–9): 499–518. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1297625>.
- Zhao, Huanxi, and Guoliang Xu. 2006. “Triangular Surface Mesh Fairing via Gaussian Curvature Flow.” *Journal of Computational and Applied Mathematics* 195 (1–2): 300–311. doi:10.1016/j.cam.2005.03.094.